Simultane und rekursive Planungsmodelle

Struktur, Semantik und Anwendung

Eckart Zwicker
Technische Universität Berlin
Fachgebiet Unternehmensrechnung und Controlling
Berlin 2003

Inhaltsverzeichnis

1. Übersicht

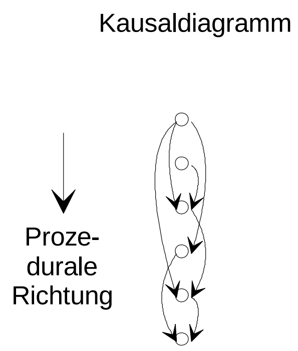
Unternehmensmodelle lassen sich im Hinblick auf die Art der strukturellen Modellbeziehungen in simultane und rekursive Modelle unterscheiden. Diese Zweiteilung von Modellen im Hinblick auf ihre Struktur führt aber auch zu zwei Modelltypen, die sich in der Semantik unterscheiden. Denn simultane Modelle führen zu kausalen Interpretationsschwierigkeiten, und ihre Verwendung erfordert daher eine besondere empirische Rechtfertigung. Weiterhin ist bei der Verwendung von simultanen Modellen zur Planung ein besonderes Lösungsverfahren erforderlich, welches nicht trivial ist. Es besteht sogar die Gefahr, dass simultane Modelle nicht lösbar sind und damit die Durchführung einer „Modelldurchrechnung" unmöglich ist.
Simultane Modelle bedürfen daher einer besonderen Beachtung. Deswegen wird im ersten Kapitel der strukturelle Aufbau simultaner Modelle betrachtet. Das zweite Kapitel erörtert die empirische Interpretation der Zusammenhänge in einem Modell, die durch simultane Gleichungen beschrieben werden. Im dritten Kapitel werden die Verfahren zu Berechnung der Variablen eines simultanen Gleichungssystems erörtert. Das vierte Kapitel berichtet schließlich darüber, wie in der einschlägigen Literatur das Thema „simultane Gleichungssysteme" in Modellen eines Unternehmens abgehandelt wird.

2. Struktur simultaner und rekursiver Modelle

Simultane und rekursive Modelle unterscheiden sich anhand des Aufbaus ihrer **Strukturmatrix**. Diese ist eine binäre, quadratische Matrix, deren Werte auf folgende Weise ermittelt werden:
Die strukturellen Gleichungen eines vorliegenden Modells werden in einer beliebigen Reihenfolge untereinander angeordnet. Die Zahl der Zeilen bzw. Spalten der Strukturmatrix dieses Modells entspricht der Zahl der Gleichungen (n). Die endogene Variable der i-ten Gleichung soll mit der i-ten Zeile und Spalte der Strukturmatrix korrespondieren. Die erste endogene Variable der Gleichungsreihenfolge korrespondiert daher mit der ersten Zeile und Spalte der Strukturmatrix. Die zweite endogene Variable mit der zweiten Zeile und Spalte usw. Eine Zeile i der Strukturmatrix wird durch folgende Vorschrift spezifiziert:
Wenn die mit der Zeile i korrespondierende strukturelle Gleichung als erklärende Variable die endogene Variable Y_j (1, …, n) enthält, dann trage in die Zeile i und die Spalte j eine Eins ein. Weise allen anderen Feldern eine Null zu.
Gelingt es, eine solche (unsortierte) Strukturmatrix eines Modells durch Zeilen- und entsprechende Spaltenaustausche (Permutationen) so zu sortieren, dass eine trianguläre Strukturmatrix (Dreiecksmatrix) zustande kommt, dann handelt es sich um ein **rekursives Modell**.
Abb. 1 zeigt eine Sortierung der Gleichungen des RoI-Definitionssystems, die zu einer triangulären Strukturmatrix führt. Die Reihenfolge der Gleichungen, welche mit den Zeilen (1 bis n) einer solchen triangulären Strukturmatrix korrespondieren, wird als **prozedurale Reihenfolge** bezeichnet. Ein Modell besitzt oft mehrere prozedurale Reihenfolgen bzw. trianguläre Strukturmatrizen.

Strukturmatrix

	U	KO	BER	KU	UR	ROI
U=P*AM						
KO=FK+VSK*AM						
BER=U-KO	1	1				
KU=U/KAP	1					
UR=BER/U	1		1			
ROI=KU*UR				1	1	



U - Umsatz	P - Absatzpreis	AM - Absatzmenge
KO - Gesamtkosten	FK - Fixe Kosten	VSK- Variable Stückkosten
KU - Kapitalumschlag	KAP - Gesamtkapital	UR - Umsatzrentabilität
ROI - Return on Investment	BER - Betriebsergebnis	

Abb. 1: Strukturmatrix des RoI-Definitionssystems

Sind die Gleichungen in einer prozeduralen Reihenfolge angeordnet, so können sie in dieser Reihenfolge durchgerechnet werden, um die endogenen Variablenwerte einer Modellalternative zu ermitteln. In einem Computerprogramm, welches diese Durchrechnung vornimmt, müssen die Anweisungen zur Berechnung der endogenen Variablen diese prozedurale Reihenfolge einhalten. Ansonsten fehlen dem Rechner die Zahlenwerte für bestimmte endogene Variablen, die als Erklärungsgrößen in einer Gleichung auftreten. Bei der Entwicklung eines Modells ist es erwünscht, dass der Benutzer die Modellgleichungen zur Erhöhung der Modellierungsfreiheit in beliebiger Reihenfolge in den Rechner eingeben kann. Die verwendete Modellierungssprache sollte immer in der Lage sein, die Gleichungen in einer prozeduralen Reihenfolge zu sortieren, um damit eine korrekte Berechnung der endogenen Variablen zu ermöglichen. Aus der sortierten Strukturmatrix lässt sich auch ein Pfeildiagramm ableiten (siehe Abb. 1), welches die Beeinflussung der Variablen zeigt. Es zeichnet sich bei einem rekursiven Modell stets dadurch aus, dass alle Einflusspfeile in dieselbe Richtung zeigen.

Wenn es nicht möglich ist, die Gleichungen so zu sortieren, dass sich eine trianguläre Strukturmatrix ergibt, dann liegt ein **simultanes Modell** vor. Eine Strukturmatrix, die sich nicht in eine trianguläre Form überführen lässt, wird als **nicht dekomponierbare Strukturmatrix** bezeichnet.

Ein Modell kann im Extremfall aus einer einzigen nicht dekomponierbaren Strukturmatrix bestehen, d. h., alle Variablen des Modells sind wechselseitig miteinander verknüpft. In fast allen Fällen besitzen aber simultane Modelle im Rahmen einer Unternehmensplanung eine Strukturmatrix mit einer oder mehreren nicht dekomponierbaren Teilmatrizen. Es gibt in diesen Modellen daher auch Variablen, die nicht zu den Variablen zählen, die mit den nicht dekomponierbaren Matrizen korrespondieren.

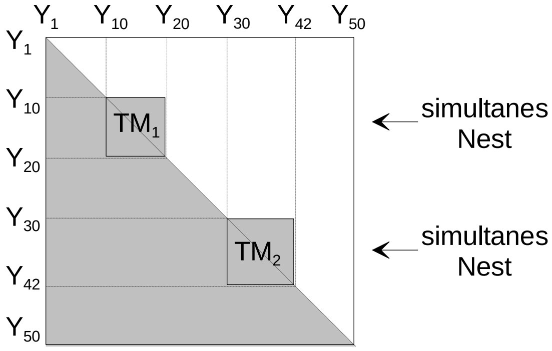


Abb. 2: Strukturmatrix eines simultanen Modells mit simultanen Nestern

Abb. 2 zeigt eine Strukturmatrix, in der alle Elemente über der Hauptdiagonale Null sind, wenn man von den Teilmatrizen TM_1 und TM_2 absieht. Unter der Hauptdiagonale (graue Felder) können Nullen oder auch Einsen stehen. Die Teilmatrizen TM_1 und TM_2 sollen nicht dekomponierbar sein. Dies bedeutet, dass die mit ihnen korrespondierenden Variablen ein simultanes Gleichungssystem bilden. Von einem simultanen Modell soll immer dann gesprochen werden, wenn ein vorliegendes Modell zumindest ein simultanes Gleichungssystem als Subsystem enthält. Diese simultanen Gleichungssysteme, die auch als **simultane Nester** bezeichnet werden sollen, müssen identifiziert werden, um eine erfolgreiche Modelldurchrechnung zu ermöglichen. Besitzt ein Modell eine Strukturmatrix mit simultanen Nestern, dann liefert diese eine prozedurale Reihenfolge, welche durch diese simultanen Nester unterbrochen wird.

Die Rechnung zur Bestimmung der Werte der endogenen Variablen in Abb. 2 vollzieht sich beispielsweise in mehreren Schritten. Zur Berechnung der Variablen Y_1 bis Y_{10} wird wie bei einem rekursiven Modell vorgegangen. Zuerst wird Y_1 berechnet, dann Y_2 usw. Nach der Ermittlung von Y_9 tritt das simultane Nest auf. Dessen endogene Variablenwerte müssen mithilfe besonderer Prozeduren ermittelt werden, auf welche wir noch eingehen. Sind die Werte Y_{10} bis Y_{20} bestimmt, wird die Berechnung bis Y_{29} wieder entsprechend der prozeduralen Reihenfolge vorgenommen usw.

Aus einer nicht dekomponierbaren Matrix lässt sich kein Pfeildiagramm ableiten, dessen Einflusspfeile alle in die angestrebte prozedurale Richtung zeigen. Es ergibt sich vielmehr mindestens ein Pfeil, der <u>nicht</u> in die prozedurale Richtung zeigt.

nach

von	A	B	C	D	E
A					1
B	1		1		
C		1			
D			1		
E				1	

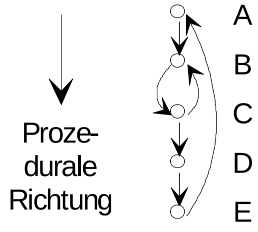


Abb. 3: Beispiel einer nicht dekomponierbaren Strukturmatrix und ihres Pfeildiagramms

Abb. 3 zeigt eine nicht dekomponierbare Strukturmatrix. In diesem Fall bildet das gesamte Modell mit seinen fünf Variablen ein simultanes Nest. Man erkennt, dass es zwei rückführende Pfeile gibt. Diese korrespondieren mit den Zahlenwerten über der Hauptdiagonale. Anhand des Pfeildiagramms soll auf eine Eigenschaft eines simultanen Gleichungssystems aufmerksam gemacht werden: Alle Variablen liegen in mindestens einer **Totalschleife**. Dies ist eine Einflusskette, die über alle Variablen führt. In Abb. 3 wird eine Totalschleife durch die Kette A-B-C-D-E-A repräsentiert. Neben Totalschleifen gibt es aber auch Schleifen, die nicht alle Variablen umfassen. Diese werden als **Teilschleifen** bezeichnet (z. B. B-C-B in Abb. 3).

Wenn ein simultanes Gleichungssystem vorliegt, muss man sich immer die Frage stellen, ob die auftretenden Schleifen eine „vernünftige empirische Interpretation" zulassen. Auf diese Frage kommen wir noch zurück, indem in einem Kosten-Leistungsmodell bestimmte Schleifentypen hinsichtlich ihrer semantischen Interpretation unterschieden werden.
Zur besseren Analyse der Schleifenstruktur eines simultanen Gleichungssystems ist es empfehlenswert, eine bestimmte Darstellungsform der nicht dekomponierbaren Strukturmatrix und damit auch ihres korrespondierenden Pfeildiagramms zu realisieren. Dies ist eine **rückführungsminimale** Strukturmatrix. Eine nicht dekomponierbare Strukturmatrix lässt unterschiedliche Sortierungen ihrer Zeilen und Spalten (Permutationen) zu. Eine rückführungsminimale Strukturmatrix ist eine nicht dekomponierbare Strukturmatrix, welche so sortiert wurde, dass die Summe ihrer Elemente über ihrer Hauptdiagonalen minimiert wird. Im Hinblick auf das korrespondierende Pfeildiagramm bedeutet dies, dass die Zahl der Einflusspfeile in die Nicht-Prozeduralrichtung minimiert ist.

3. Arten simultaner Gleichungen in Planungsmodellen von Unternehmen

Bisher wurden simultane und rekursive Modelle auf rein struktureller Ebene gekennzeichnet. Nunmehr soll auf die semantische Interpretation ihrer Beziehungen im Rahmen eines empirischen Modells eingegangen werden.
Simultane Gleichungssysteme führen zu Interpretationsschwierigkeiten, wenn man sie zur Entwicklung eines Definitionssystems oder zur Beschreibung hypothetischer Beziehungen verwenden will. Betrachtet man eine Variablenschleife, die in einem Modell auftritt, so stellt sich die Frage: Kann eine solche Variablenschleife sinnvoll als eine geschlossene Kette von Definitions- oder auch Hypothesengleichungen verwendet werden? Die potenziellen Einwände sind folgende:

- Werden die Variablen in einer Schleife nur durch Definitionsgleichungen erklärt, dann ist jede dieser Variablen über mehrere Definitionsgleichungen von sich selbst abhängig. In der Definitionslehre gilt aber die Forderung, dass Zirkeldefinitionen nicht zulässig sind. Sind daher auch solche „Schleifendefinitionen" verboten?
- Wird in einer Variablenschleife eine Variable X durch eine Hypothesengleichung erklärt, dann ist X über mehrere Definitions- oder auch Hypothesengleichungen von sich selbst abhängig. Die Transitivitätsbeziehung kausaler Erklärungen besagt: „Wenn A die Ursache

von B ist und B die Ursache von C, dann ist auch A die Ursache von C“. Aufgrund dieser Transitivitätsbeziehungen müsste sich die Variable X, welcher in einer Schleife von Hypothesen liegt, selbst verursachen oder zumindest mitverursachen. Dies widerspricht dem Kausalprinzip, welches ablehnt, dass eine Wirkung ihre eigene Ursache oder Mitursache sein kann.

Akzeptiert man beide Argumente, dann dürften simultane Gleichungssysteme in empirischen Modellen <u>nicht zugelassen</u> werden.[1)] Simultane Gleichungssysteme können aber trotz dieser Einwände in Modellen einer Unternehmensplanung (und auch in Ist-Modellen) verwendet werden. Es ist nur zu rechtfertigen, warum sie (dennoch) anwendbar sind.
Wir wenden uns den Arten simultaner Gleichungen zu. Es soll unterschieden werden zwischen simultanen Beziehungen in Standard-Kosten-Leistungs-Modellen und Unternehmensergebnis- und Finanzmodellen (UEFI-Modellen) zu.

Standard-Kosten-Leistungs-Modellen ohne Beziehungstableaus können sechs Arten von simultanen Beziehungen enthalten.[2)] Diese sind:

1. Preisschleifen zwischen Kostenartentableaus
2. Bestellmengenschleifen zwischen Kostenartentableaus
3. Preisschleifen zwischen Kostenträgertableaus
4. Bestellmengenschleifen zwischen Kostenträgertableaus
5. Unechte Preisschleifen zwischen Kostenartentableaus
6. Unechte Bestellmengenschleifen zwischen Kostenartentableaus

Simultane Beziehungen in Form von **Preisschleifen** zwischen Kostenartentableaus treten am häufigsten auf. Eine solche Beziehung beschreibt Abb. 4. Die Kostenstellen der Wasser- und Stromerzeugung berechnen einen Vollkostenpreis P_W und P_S. Aus Abb. 4 lassen sich zwei Gleichungen ableiten, in welchen nur die beiden Preise als symbolische Größen auftreten. Sie werden durch (1) beschrieben.

$$
\begin{aligned}
P_W &= \frac{20.000 * P_S + 6.000}{10.000} \\
P_S &= \frac{2.000 * P_W + 18.000}{100.000}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

1) Von einer solchen Konsequenz geht die Simulationssprache DYNAMO aus, in welcher simultane Gleichungen nicht erlaubt sind.

2) Ein Standard-Kosten-Leistungs-Model ist ein Modell, welches vollständig mit Hilfe der Modelltableaus einer Integrierten Zielverpflichtungsplanung beschrieben werden kann. Das ist bei dem CO-System von SAP beispielsweise der Fall. Ein Beziehungstableau wird verwendet, wenn eine zur Modellierung eines Unternehmens erforderliche strukturelle Gleichung nicht durch eines der Standard-Modelltableaus beschrieben werden kann. In das Beziehungstableau wird diese Gleichung eingeben.
Zum Aufbau von Standard-Kosten-Leistungsmodellen auf der Grundlage von Modelltableaus siehe:
Zwicker, E., Das Modelltableausystem von Kosten-Leistungsmodellen im System der Integrierten Zielverpflichtungsplanung, Berlin 2000

Man erkennt, dass P_w nicht ohne die Kenntnis von P_S und P_S nicht ohne die Kenntnis von P_W ermittelt werden kann. Es liegt ein simultanes Gleichungssystem vor, dessen Kausaldiagramm eine Preisschleife bildet.

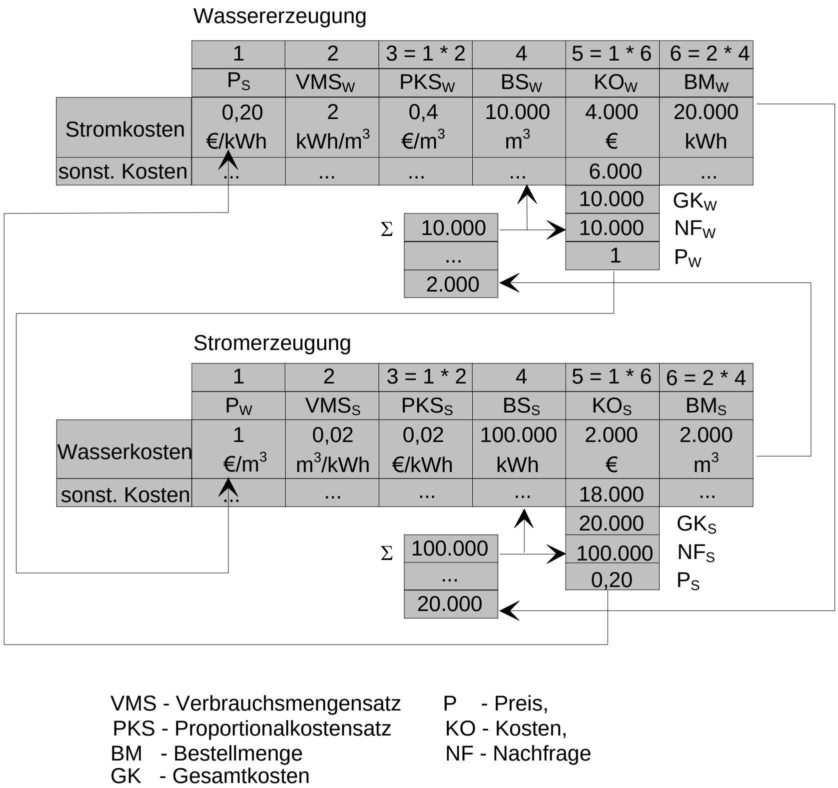


Abb. 4: Beispiel einer Preisschleife zwischen Kostenartentableaus

Simultane Gleichungssysteme dieses Typs werden als **Preisschleifensysteme** bezeichnet. Solche Preisschleifensysteme können beträchtliche Ausmaße annehmen und hundert und mehr Preise (in verschiedenen Kostenartentableaus) umfassen. In dem vom Verfasser mit seinen Mitarbeitern entwickelten Planungsmodell von ThyssenKrupp Steel, welches von diesem Unternehmen bereits seit mehreren Jahren zur Planung des Betriebsergebnisses verwendet wird, trat ein simultanes Preisschleifensystem auf, welches aus 100.058 Gleichungen bestand.[3)] Es beschreibt Preisschleifen, die über 1.316 Bezugsgrößeneinheiten (Kostenstellen und Untereinheiten von Kostenstellen) führen.[4)] Die Preise solcher Preisschleifensysteme werden durch das folgende Gleichungssystem in allgemeiner Form beschrieben:

3) Diese Angaben sind 2009 in den ursprünglichen Text aus dem Jahre 2003 eingefügt worden.

4) Siehe zum Aufbau dieses Modells: Lehnert, S., Mittelfristplanung mit INZPLA-Gleichungsmodellen am Beispiel der Eisen- und Stahlindustrie, Diss. TU-Berlin 2008, im Druck.

$$P_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} BM_{i,1} * P_i + SK_1\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} BM_{1,k} + SBM_1\right)$$

$$\vdots \tag{2}$$

$$P_n = \left(\sum_{i=1}^{n} BM_{i,n} * P_i + SK_n\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} BM_{n,k} + SBM_n\right)$$

wobei:

P_i, P_j – Preis der Bezugsgrößeneinheit i bzw. j
$BM_{i,k}$ – Bestellmenge der Bezugsgrößeneinheit k bei der Bezugsgrößeneinheit i
SK_j – Sonstige Kosten der Bezugsgrößeneinheit j
SBM_j – Sonstige Bestellmenge bei der Bezugsgrößeneinheit j
i – Index für liefernde Bezugsgrößeneinheit
j,k – Index für bestellende Bezugsgrößeneinheit
n – Anzahl der Bezugsgrößeneinheiten

Dabei sind die sonstigen Kosten einer Bezugsgrößeneinheit j (SK_j) primäre Kosten der Bezugsgrößeneinheit oder sekundäre Kosten von Bezugsgrößeneinheiten, die nicht in dem Preisschleifensystem enthalten sind. Die sonstige Bestellmenge bei der Bezugsgrößeneinheit j (SBM_j) beschreibt die Summe aller Bestellungen von Bezugsgrößeneinheiten, die nicht in dem Preisschleifensystem liegen.

Das Gleichungssystem (2) geht von der Annahme aus, dass (wie in Abb. 4) die Nachfrage mit der Beschäftigung identisch ist, d. h., es existieren keine Kostensatzbestimmungstableaus.[5)]
Mit

$$a_{i,j} = \frac{BM_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n} BM_{j,k} + SBM_j} \tag{3}$$

und

$$c_j = \frac{SK_j}{\sum_{k=1}^{n} BM_{j,k} + SBM_j} \tag{4}$$

ergibt sich das lineare Gleichungssystem

5) Sind Kostensatzbestimmungstableaus vorhanden, dann sind die Bestellmengen BM_j durch den Ausdruck $NF_{ij}*PK_{ij}$ zu ersetzen, wobei NF_{ij} die Bestellung der Bezugsgrößeneinheit i bei der Bezugsgrößeneinheit j darstellt und PK_{ij} der Produktionskoeffizient der Kosten Bezugsgrößeneinheit j für eine Nachfrageeinheit der Kostenstelle i. Das Produkt aus Produktionskoeffizient und Nachfrage ergibt die Bestellmenge.

$$\begin{aligned} P_1 &= a_{1,1} * P_1 + \cdots + a_{n,1} * P_n + c_1 \\ &\vdots \\ P_n &= a_{1,n} * P_1 + \cdots + a_{n,n} * P_n + c_n \end{aligned} \tag{5}$$

Damit ein simultanes Gleichungssystem vorliegt, darf die Matrix $(a_{i,j})$ in (5) nicht dekomponierbar sein. In einem Planungsmodell, welches unter Verwendung der Standard-Modelltableaus einer Integrierten Zielverpflichtungsplanung generiert wurde, treten die Verrechnungspreise eines Preisschleifensystems nicht in der Form (5) auf. Es liegt vielmehr ein simultanes Gleichungssystem vor, welches außer den Verrechnungspreisen weitere Variable enthält. In Abb. 4 gilt beispielsweise für die Berechnung des Verrechnungspreises P_S:

$$P_S = GK_S \ / \ NF_S$$

$$GK_S = SK_S + WK_S$$

$$WK_S = Pw * BM_S$$

P_S – Preis Strom [€/kWh]
GK_S – Gesamtkosten der Stromerzeugung [€]
NF_S – Nachfrage Strom [kWh]
SK_S – Sonstige Kosten der Stromerzeugung [€]
WK_S – Wasserkosten der Stromerzeugung [€]
BM_W – Bestellmenge Wasser der Stromerzeugung [m^3]
P_W – Preis Wasser [€/m^3]

Neben P_S und P_W sind daher auch noch GK_S und WK_S endogene Variable des simultanen Gleichungssystems. Zu einer Preisgleichung für P_S, die der Form (5) entspricht, gelangt man durch algebraische Operationen, welche die Variablen GK_S und WK eliminieren. Dies ergibt:

$$P_S = a * P_W + c \tag{6}$$

mit:

$$a = BM_W \ / \ NF_S \tag{7}$$

$$c = SK_S \ / \ NF_S \tag{8}$$

Das Programmsystem der Integrierten Zielverpflichtungsplanung (INZPLA) kann mit Hilfe von Verfahren der Computeralgebra die linearen Gleichungssysteme der Form (5) für ein vorliegendes Preisschleifensystem ermitteln.[6)] Ihre Koeffizientenmatrix entspricht der Strukturmatrix der Preisgleichungen. Statt einer 1 enthält die Koeffizientenmatrix aber den Wert des Koeffizienten.

Wenn Preisschleifensysteme der Form (5) auftreten, dann wird oft von „interdependent abrechnenden Kostenstellen" gesprochen. Eine solche Bezeichnung lässt aber außer Acht, dass

6) Die Parameter a_{ij} und c_i werden dabei numerisch spezifiziert.

auch die Bezugsgrößeneinheiten einer Mehrbezugsgrößen-Kostenstelle interdependent miteinander abrechnen oder auch eine Kostenstelle sich selbst beliefert. Dies gilt zum Beispiel für den Strom, den die Stromerzeugung selbst verbraucht. Es gibt daher auch simultane Preisschleifensysteme, bei denen keine Kostenstellen interdependent miteinander abrechnen. In sehr vielen Fällen liegen diese Bedingungen aber nicht vor, sodass es dann (wie in Abb. 4) angemessen ist, von interdependent abrechnenden (Einbezugsgrößen-)Kostenstellen zu sprechen.

Das simultane Gleichungssystem (2) beschreibt ein System von Definitionsgleichungen der Verrechnungspreise. Ein zu definierender Preis P_i lässt sich immer zumindest über eine Schleife auf sich selbst zurückführen. Die durch solche Schleifen bewirkte „Zirkeldefinition“ ist aber akzeptabel, wenn eine Lösung des Gleichungssystems existiert. Denn es lassen sich keine Argumente finden, um eine solche Zirkeldefinition als unzulässig abzulehnen.[7)]

Der zweite Typ einer simultanen Beziehung beschreibt **Bestellmengenschleifen** zwischen Kostenartentableaus. Eine solche Bestellmengenschleife ist (neben der erörterten Preisschleife) in Abb. 4 beschrieben. Sie ergibt sich gemäß

$$BM_S = 0{,}02 * (\overbrace{80.000 + BM_W}^{B_S}) \qquad (9)$$

$$BM_W = 2 * (\underbrace{8.000 + BM_S}_{B_W}) \qquad (10)$$

mit:

- BM_S – Bestellmenge Strom durch die Wassererzeugung
- BM_W – Bestellmenge Wasser durch die Stromerzeugung
- B_S – Beschäftigung der Stromerzeugung
- B_W – Beschäftigung der Wassererzeugung

Die Bestellmenge an Strom durch die Wasserzeugung (BM_S) hängt von der Bestellmenge an Wasser (BM_w) ab, welche die Stromerzeugung (z. B. zum Kühlen) benötigt und umgekehrt. Wenn solche Bestellmengenbeziehungen existieren, dann soll davon gesprochen werden, dass das entsprechende Kausaldiagramm ein **Bestellmengenschleifensystem** bildet.

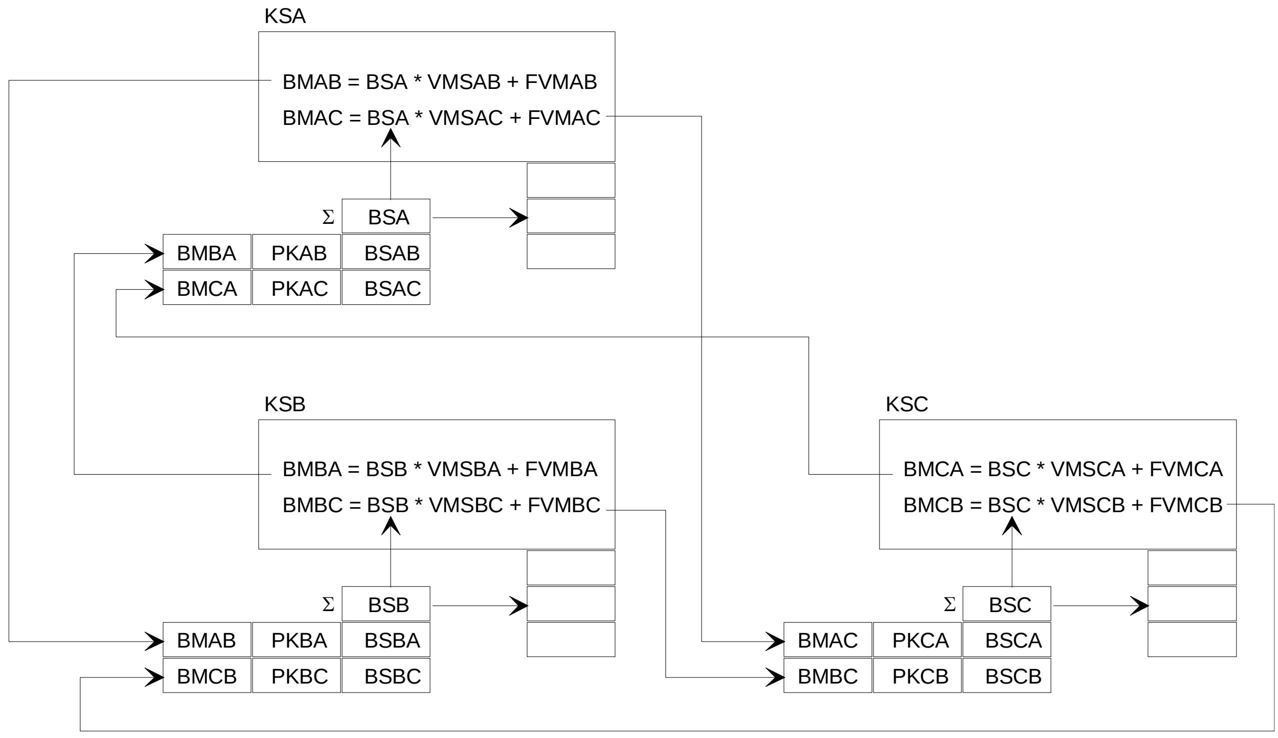
In Abb. 5 wird ein Bestellmengenschleifensystem zwischen drei Kostenstellen beschrieben. Eine Kostenstelle kann, wie die Kostenstelle KSC zeigt, auch mehrere Bestellungen vornehmen. Die Bestellmengen, welche in Abb. 5 durch Pfeile repräsentiert werden, bilden ein System von Bestellmengenschleifen. Die allgemeine Form eines Gleichungssystems, welches ein Bestellmengenschleifensystem beschreibt, zeigt (11). Liegt ein Modell der Integrierten Zielverpflichtungsplanung vor, so ist (11) nicht explizit gegeben, sondern wird durch algebraische Umformungen ermittelt.

7) In der klassischen Definitionslehre wurde ein solcher Fall bisher nicht diskutiert. Siehe zur Diskussion des Verfassers über dieses Thema mit Carl Hempel in: Geschichte, Berlin 2016, S.443, www.Inzpla.de/INZPLA-Geschichte.pdf

$$\begin{aligned} BM_1 &= GBS_{1,1} * BM_1 + \cdots + GBS_{1,n} * BM_n + FVM_1 \\ &\vdots \\ BM_n &= GBS_{n,1} * BM_1 + \cdots + GBS_{n,n} * BM_n + FVM_n \end{aligned} \tag{11}$$

mit:

BM_i – Bestellmenge zwischen zwei Bezugsgrößeneinheiten
$GBS_{i,j}$ – Gesamter Bedarfssatz der Bestellung i, die durch die Bestellung j induziert worden ist
FVM_i – Fixe Verbrauchsmenge zwischen zwei Bezugsgrößeneinheiten
n – Anzahl der Bestellungen



Legende:

KSX = Kostenstelle X (X = A, B, C)
BMXY = Bestellmenge von Kostenstelle X an Kostenstelle Y
BSX = Beschäftigung der Kostenstelle X
VMSXY = Verbrauchsmengensatz der Kostenstelle X bzgl. der Bestellung bei Kostenstelle Y
FVMXY = Fixe Verbrauchsmenge der Kostenstelle x bzgl. der Bestellung bei Kostenstelle Y
PKXY = Produktionskoeffizient der Kostenstelle X bzgl. der Bestellung von Kostenstelle Y
BSXY = Beschäftigung der Kostenstelle X aufgrund der Bestellung der Kostenstelle Y

Abb. 5: Beispiel eines Bestellmengenschleifensystems

($GBS_{i,j}$) ist eine nicht dekomponierbare Matrix. Der gesamte Bedarfssatz muss keine Basisgröße sein, sondern kann auch aus dem Produkt eines Verbrauchsmengensatzes mit einem Produktionskoeffizienten errechnet werden. Dies gilt beispielsweise in Abb. 5 für die Bestellmenge BMAC der Kostenstelle KSA an KSC, deren totaler Bedarfssatz bezüglich der Bestellmenge BMBA von KSB aus dem Produkt von VMSAC und PKAB gebildet wird.

Es fragt sich, wie eine Bestellmengenschleife empirisch zu interpretieren ist. Die Gleichungen in (9) und (10), welche eine Bestellmengenschleife beschreiben, sind keine Definitionsgleichungen, sondern Hypothesengleichungen. Mit Einsetzung von (9) in (10) erhält man eine „verdichtete“ Hypothesengleichung, welche besagt, dass die Bestellmenge BM_S von sich selbst abhängt. Dies widerspricht, wie erwähnt, einer kausalen Interpretation. Denn BM_S wäre in der verdichteten Hypothesengleichung Ursache und Wirkung zugleich. Solche simultanen Hypothesengleichungen werden aber im Rahmen der Ökonometrie verwendet. Ihre Rechtfertigung folgt aus der Deutung, dass die simultane Beziehung das Ergebnis der zeitlichen Aggregation einer rekursiven Beziehung darstellt. Dies soll anhand des Schemas in Abb. 6 demonstriert werden:

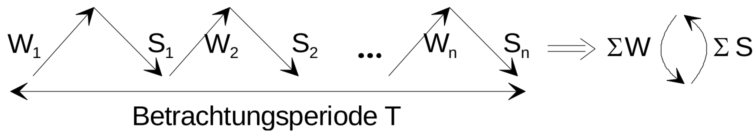


Abb. 6: Schema zur Rechtfertigung einer simultanen Mengenbeziehung

Es wird davon ausgegangen, dass eine Wassermenge W_1 (über die Kühlung) zur Erzeugung des Stroms S_1 beiträgt. Es existiert damit eine zeitlich verzögerte Beziehung zwischen der Wassereinsatzmenge W_1 und der Stromerzeugungsmenge S_1. Für die gesamte Betrachtungsperiode T kann wie in dem Schema dargestellt, eine simultane Beziehung formuliert werden, die den „an sich“ rekursiven Zusammenhang in offenbar hinreichender Weise beschreibt. Dies ist die Rechtfertigung für die Verwendung simultaner Mengenbeziehungen.

Treten Preis- und Bestellmengenschleifensysteme in Kostenartentableaus auf, dann bestehen zwischen ihnen bestimmte Abhängigkeiten. Dies lässt sich anhand von Abb. 4 demonstrieren. Wenn in den Definitionsgleichungen (1) der Einfluss der Bestellmengen BM_S und BM_W expliziert wird, dann erhält man

$$P_w = \frac{2 * (8.000 + BM_e) * P_e * 6000}{8000 + BM_f}$$

$$P_e = \frac{0,02 * (80.000 + BM_w) * P_w + 18000}{80.000 + BM_w} \qquad (12)$$

Bevor das simultane Gleichungssystem der Verrechnungspreise (12) gelöst wird, ist das Bestellmengengleichungssystem (9 und 10) zu lösen. Denn die ermittelten Werte für BM_S und BM_W werden in (12) vorausgesetzt. Im Rahmen einer prozeduralen Durchrechnung wird daher immer zuerst das (simultane) Bestellmengenschleifensystem gelöst (als simultanes Nest) und danach das zugehörige (simultane) Preisschleifensystem.

Wenn ein (simultanes) Bestellmengenschleifensystem existiert, dann gibt es auch ein mit ihm korrespondierendes simultanes Preisschleifensystem, aber nicht umgekehrt. Denn die Bestellmengen, die in dem simultanen Preisschleifensystem auftreten, können auch fix sein, d. h. nicht von der Beschäftigung der eine Bestellung aufgebenden Kostenstelle (über einen Verbrauchsmengensatz) abhängen. In vielen Beispielen der Literatur wird von diesem Fall ausgegangen, sodass Bestellmengenschleifen praktisch nicht erörtert werden.

Das bisher beschriebene Bestellmengenschleifensystem verlief über Kostenartentableaus. Es handelte sich daher um Bestellungen von Mengen, die keine Kostenträger sind. Wenn aber ein mehrstufiges Kostenträgersystem realisiert ist, dann sind auch Bestellmengenschleifen und Preisschleifen zwischen den Kostenträgern möglich. Ein solcher Fall liegt vor, wenn ein Kostenträger in der Fertigungsstelle als Vorprodukt von sich selbst fungiert. Solche Produktionsbeziehungen sind vor allem in der chemischen Industrie zu beobachten.

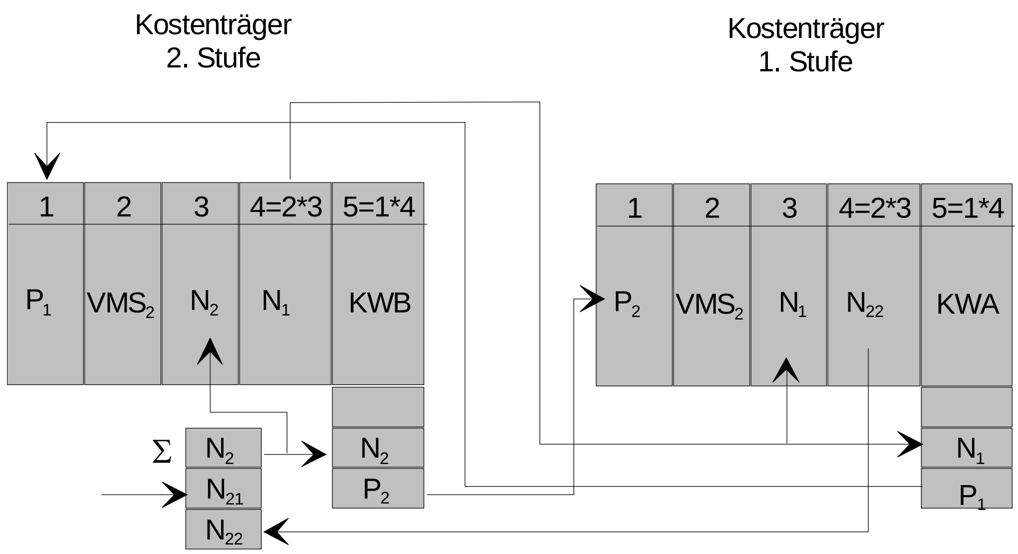


Abb. 7: Beispiel einer Bestellmengenschleife zwischen Kostenträgern

In Abb. 7 ist ein zweistufiges Kostenträgersystem beschrieben. Die Produktionsmenge der zweiten Stufe (N_2) wird mit einem Betrag von N_{22} als Einsatzstoff für den Kostenträger der ersten Stufe verwendet. Die Einsatzmenge steht in einem bestimmten Verhältnis (VMS) zur Produktionsmenge N_1 des Kostenträgers. Diese Produktionsmenge fungiert vollständig als Einsatzmenge des Kostenträgers der zweiten Stufe.
Die mathematischen Beziehungen unterscheiden sich nicht von dem erörterten Fall einer Bestellmengenschleife zwischen Kostenartentableaus. Es ergibt sich daher ein Bestellmengen- und ein korrespondierendes Preisschleifensystem.

In einem Beitrag beschreibt Pichler die Modellierung des Erzeugungsprozesses eines Industriekraftwerkes. Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass bestimmte Erzeugnisse (Strom, Dampf, Turbinenkondensat) wieder an einer früheren Stelle in den Produktionsprozess eingeleitet werden.[8)] Damit treten bei der Modellierung dieses Prozesses Bestellmengenschleifen auf. In Abb. 8 sind die Beziehungen in diesem Industriekraftwerk dargestellt, das nicht nur Strom, sondern auch Dampf von 120, 16 und 3,5 ata liefern soll.

8) Vgl. zu diesem Modell: Pichler, O., Anwendung der Matrizenrechnung bei der Betriebskostenüberwachung, in: Adam, A.; Ferschl, F.; Klamecker, A.; Klingst, A.; Pichler, O.; Roppert, J.; Scholz, H.; Wenke, K.; Wetzel, W., Anwendungen der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme, 3. Aufl., Würzburg, Wien 1966, Seite 74 ff.

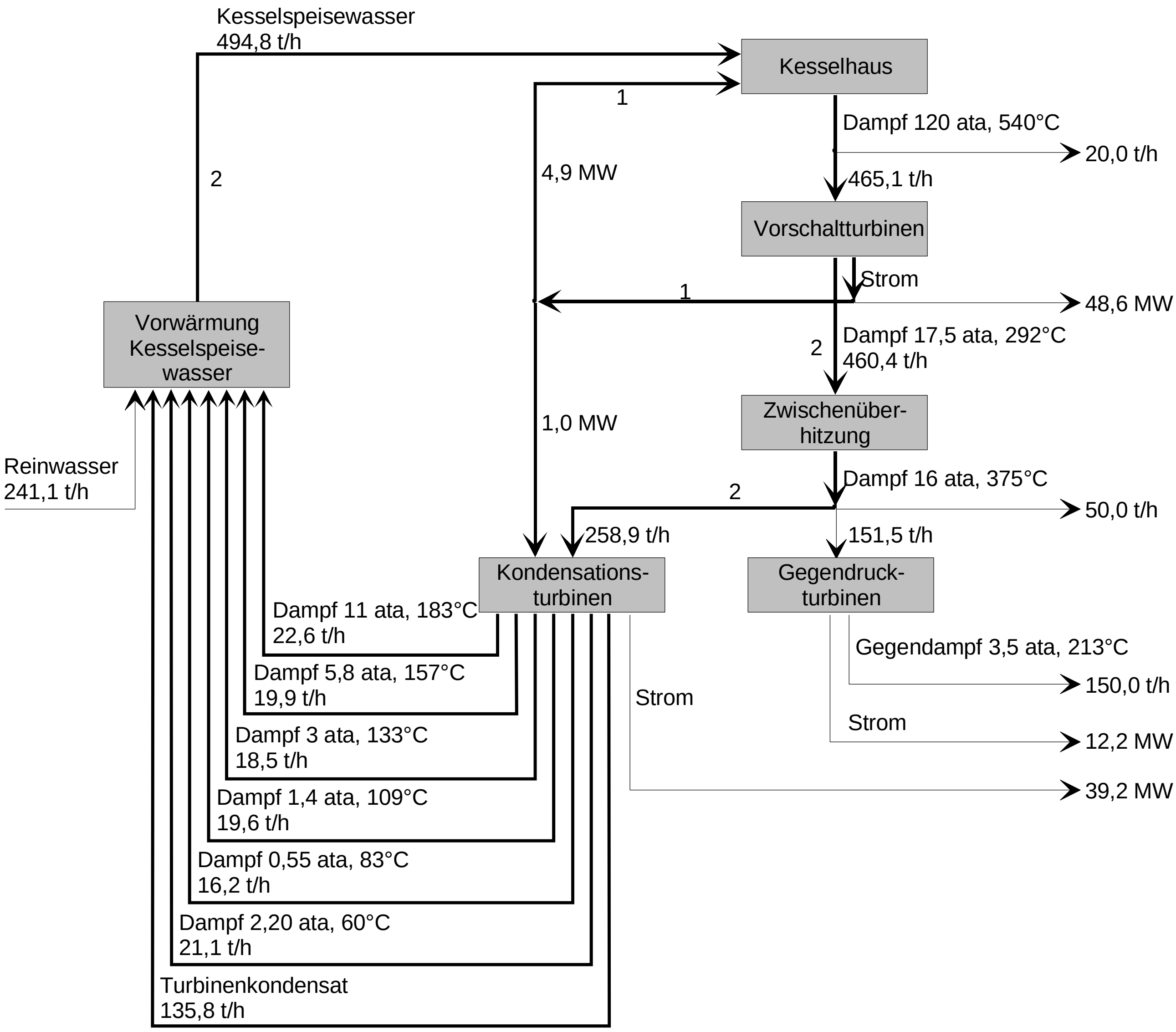


Abb. 8: Bestellmengenschleifen in einem Produktionsprozess nach Pichler

Das Kraftwerk ist mit einem Kesselhaus zur Erzeugung von 120-ata-Dampf und mit Vorschalt-, Gegendruck- und Kondensationsturbinen ausgerüstet. Das Kesselhaus liefert in dem dargestellten Fall stündlich 485,1 t Dampf von 120 ata und 540 °C. Von diesem Dampf wird ein geringer Teil, nämlich 20 t/h, nach außen, etwa an die Abteilung eines Chemiebetriebs, abgegeben, während der größte Teil, nämlich 465,1 t/h, in den Vorschaltturbinen 54,5 MW Strom erzeugt. Davon werden allerdings nur 48,6 MW nach außen abgegeben, 4,9 MW werden im Kesselhaus und 1 MW in den Kondensationsturbinen verbraucht.

Der aus den Vorschaltturbinen austretende Dampf von 17,5 ata und 292°C wird im Kesselhaus auf 375 °C erhitzt, wobei er einen Druckabfall auf 16 ata erleidet. Von dieser Dampfmenge - im Ganzen sind es 460,4 t/h - werden 50,0 t/h abgegeben, während 151,5 t/h in den Gegendruckturbinen 12,2 MW Strom erzeugen, wobei 150,0 t/h Gegendampf von 3,5 ata und 213 °C anfallen.

Aus der restlichen Menge 16-ata-Dampf, nämlich aus 258,9 t/h, werden in den Kondensationsturbinen 39,2 MW erzeugt. Diesen Turbinen wird außerdem in 6 Stufen insgesamt 117,9 t/h Dampf zur Vorwärmung des Kesselspeisewassers entnommen. Neben diesem Vorwärmdampf dienen zur Deckung des Kesselspeisewasserbedarfs von 494,8 t/h noch 135,8 t/h Turbinenkondensat der Kondensationsturbinen und 241,1 t/h Reinwasser, die, wie der Einfachheit halber angenommen wird, von außen kommen. Das System besitzt drei Bestellmengenschleifen: (Dampf, Strom), (Dampf, Strom, Dampf/Kondensat, Speisewasser) und (Dampf, Speisewasser).

Die fünfte Art eines simultanen Gleichungssystems in einem Standard-Kosten-Leistungs-Modell ohne Beziehungstableaus kann durch die Verwendung unechter Preise auftreten (Fall 5 auf Seite 5). Es ergibt sich ein **unechtes Preisschleifensystem**, wenn in einer Totalschleife zumindest ein unechter Preis auftritt.

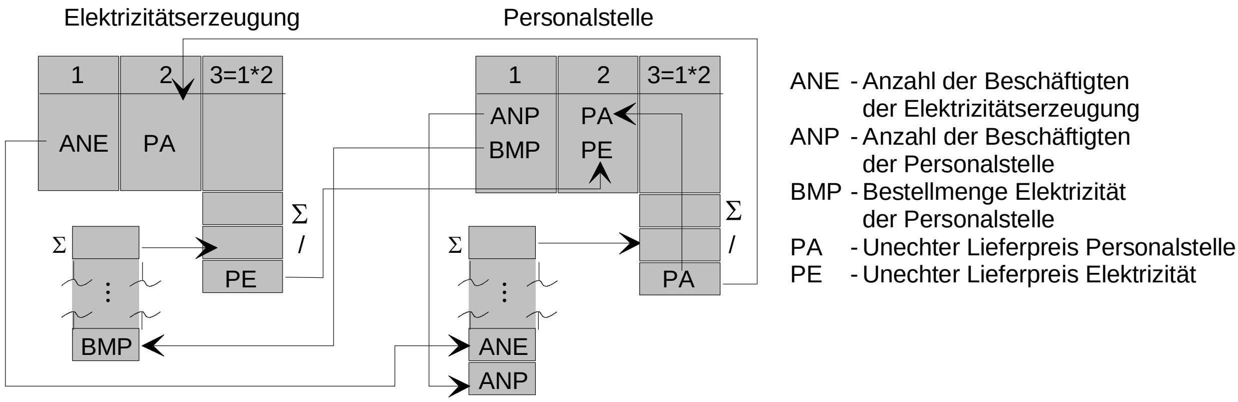


Abb. 9: Beispiel einer unechten Preisschleife

In Abb. 9 ist der Fall beschrieben, dass die Kosten der Personalstelle nach einem Umlageschlüssel verteilt werden, welcher der Zahl der Beschäftigten entspricht. Da auch die Personalstelle Beschäftigte hat, verrechnet sie Personalkosten in einer unechten Preisschleife auf sich selbst. Wenn die Personalstelle von einer anderen Kostenstelle eine Leistung erhält, dann ergibt sich eine weitere Preisschleife. Dies ist im angeführten Beispiel der Fall. Denn die Stromerzeugung verrechnet einen Teil ihrer Kosten (BMP*PE) auf die Personalstelle. Die entstehende Preisschleife besteht aus dem echten Lieferpreis (PE) und dem unechten Lieferpreis (PA).

Im Prinzip ist es auch möglich, dass unechte Bestellmengenschleifen auftreten (Fall 6 auf Seite 5). Dies ist aber sehr unwahrscheinlich. Im vorliegenden Beispiel läge dieser Fall vor, wenn der Stromverbrauch in einem festen Verhältnis (Verbrauchsmengensatz) zum Personalbestand geplant ist. Weiterhin müssten die Arbeitskosten in der Stromerzeugung in einem festen Verhältnis (Verbrauchsmengensatz) von der erzeugten Leistung geplant werden.

Wenn Standard-Kosten-Leistungs-Modelle Beziehungstableaus besitzen, dann sind weitere simultane Gleichungssysteme denkbar, die durch die Spezifikation spezieller Modellgleichungen in den Beziehungstableaus verursacht werden. Es seien zwei Beispiele angeführt: Der erste Fall liegt vor, wenn der Leiter einer Absatzabteilung eine Prämie erhält, die vom erzielten Absatzbereichsgewinn abhängt. Dann beeinflusst diese Prämie als Kostengröße zugleich diesen Bereichsgewinn. Damit entsteht eine simultane Beziehung.

Der zweite Fall kann auftreten, wenn eine Kosten-Plus-Preisvorschrift zur Ermittlung des Absatzpreises verwendet wird. In der Praxis wird der Verkaufspreis oft nach einer solchen Vorschrift ermittelt.[9)]
Sie besagt, dass der Absatzpreis (P) eines Artikels aus dessen Vollkostensatz (VKS) zuzüglich einer Gewinnmarge (GM) ermittelt werden soll, d. h.

$$P = VKS + GM \tag{13}$$

P - Preis
VKS - Vollkostensatz
GM - Gewinnmarge

Wenn die Werbungskosten nach der prozyklischen Entscheidungsvorschrift

$$WK = AS * U \tag{14}$$

WK - Werbungskosten
U - Umsatz
AS – Anteilssatz

mit:

$$U = P * AM \tag{15}$$

festgelegt werden, dann tritt ein simultanes Gleichungssystem auf. Denn die Werbungskosten, die in den Vollkostensatz eingehen, hängen vom Absatzpreis ab, der eine Komponente des wertmäßigen Umsatzes (U) bildet.[10)] Das simultane Gleichungssystem wird in diesem Beispiel durch die Einführung von zwei Entscheidungsvorschriften, d. h. besondere Formen einer Hypothese, bewirkt. Es entsteht die in Abb. 10 angeführte Variablenschleife.

Abb. 10: Beispiel einer simultanen Beziehung im Absatzbereich

Auch in Unternehmensergebnis- und Finanzmodellen (UEFI-Modellen) können simultane Gleichungssysteme auftreten. So hat Freidank gezeigt, dass bei der Erfolgsrechnung einer unbeschränkt körperschaftssteuerpflichtigen GmbH folgendes lineares Gleichungssystem auftritt.[11)] [12)]

9) Zwicker, E., Integrierte Zielverpflichtungsplanung und Absatzplanung, , Berlin 2002, Seite 29f.
10) Die Anwendung dieser Entscheidungsvorschriften im Rahmen einer integrierten Zielverpflichtungsplanung wird abgelehnt.
11) Freidank, C., Einsatzmöglichkeiten simultaner Gleichungssysteme im Bereich der computergestützten Rechnungslegungspolitik, ZfB 60. Jg. (1990), H. 3, Seite 261-279.
12) Der Ansatz von Freidank arbeitet nicht mit den aktuellen Körperschaftssteuersätzen. Diese liegen derzeit bei 30% für ausgeschüttete und 45 % für einbehaltene Gewinne (Stand 1998).

$$\begin{bmatrix} \text{Jnach} \\ \text{KSt} \\ \text{GewESt} \\ \text{TA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ mh & mh & 0 & 0 \\ tb & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \text{Jnach} \\ \text{KSt} \\ \text{GewESt} \\ \text{TA} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{vJvor} \\ ka^\circ - 0{,}4375 * A50 + 1{,}125 * A0 \\ m * h * \left(ka^\circ - Vk + ga\right) \\ ta * tb \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Die endogenen Variablen sind:

```
Jnach  - Handelsrechtlicher Jahresüberschuss
KSt    - Körperschaftssteuer
GewESt - Gewerbeertragssteuer
TA     - Tantieme
```

Hierzu liefert Freidank das folgende Beispiel, anhand dessen die Parameterwerte in (16) konkretisiert werden.

“Vorläufige Gewinn- und Verlustrechnung zum 31.12.19....

Soll			**Haben**
	in Tsd. €		in Tsd. €
diverse Aufwendungen	1900	Umsatzerlöse	2400
Körperschaftssteueraufwand	230	diverse Erträge	640
Gewerbesteueraufwand	95		
Vorläufiger Erfolgssaldo	815		
	3040		3040

Es liegen weiterhin folgende Informationen vor:

(1) *„Die Differenz zwischen Jnach und KE beträgt (ohne KSt selbst) 150 Tsd. €.*
ka° = 150
(2) *An die Anteilseigener soll ein Betrag von 380 Tsd. € ausgeschüttet werden, ggf. auch durch Auflösung von anderen Gewinnrücklagen, die in Höhe von 800 Tsd. € vorhanden und mit 50 % KSt vorbelastet sind.*
A50 = 380
(3) *Der Gewerbesteuersatz der Standortgemeinde beträgt 425 %, die Steuermesszahl für den Gewerbeertrag nach § 11 Abs. 2 GewStG 5%*
h = 4,25 m = 0,05 sg = 0,17526
(4) *Während die gewerbeertragssteuerlichen Modifikationen nach § 8, § 9 GewStG 90 Tsd. € betragen, beläuft sich die gemäß § 12f GewStG auf das Gewerbekapital zu berechnende GewKapSt auf 12 Tsd. €*
ga = 90
(5) *Die Tantieme für die Geschäftsführung beträgt 12 % des in der Handelsbilanz ausgewiesenen Jahresüberschusses.*
ta = 0 tb = 0,12
(6) *Aus den vorliegenden Werten errechnet sich der vorläufige Jahresüberschuss (vJvor) mit 1128 Tsd. €.*
vJvor = 1128“

Die Einsetzung der von Freidank mitgeteilten Parameterwerte in (16) ergibt:

$$\begin{bmatrix} \text{Jnach} \\ \text{KSt} \\ \text{GewESt} \\ \text{TA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2125 & 0{,}2125 & 0 & 0 \\ 0{,}12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \text{Jnach} \\ \text{KSt} \\ \text{GewESt} \\ \text{TA} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1128 \\ -16{,}25 \\ 51 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Es handelt sich um ein simultanes Gleichungssystem, weil seine Strukturmatrix in (17) nicht dekomponierbar ist. In UEFI-Modellen können weiterhin im Rahmen der Finanzplanung simultane Beziehungen zwischen den finanziellen Entscheidungsvariablen auftreten.[13)]

Nachdem die Arten simultaner Gleichungssysteme in Unternehmensmodellen beschrieben wurden, sind noch zwei Fragen zu behandeln: Wie können solche Systeme überschaubar gemacht werden? Und: Unter welchen Umständen sind solche Systeme lösbar? Die Überschaubarkeit wird im Folgenden betrachtet, die Lösbarkeit im anschließenden Kapitel 4.

Es ist zu unterscheiden, ob die Totalschleifen eines Standard-Kosten-Leistungs-Modells über Beziehungstableaus laufen oder nicht. Stammt keine der Variablen eines simultanen Gleichungssystems aus einem Beziehungstableau, dann können ihre Schleifenbeziehungen eindeutig semantisch interpretiert werden, weil sie einem der beschriebenen sechs Typen angehören. Werden Modelle mit Beziehungstableaus verwendet, dann ist es möglich, beliebige Arten simultaner Gleichungssysteme zu generieren. Es hat sich gezeigt, dass die über Beziehungstableaus laufenden simultanen Beziehungen oft Fehlspezifikationen darstellen. Wenn dem Benutzer die Variablenschleifen mitgeteilt werden könnten, die seine Modellbildungen zur Folge haben, dann könnte er überprüfen, ob die entstandenen geschlossenen Einflussketten von ihm so intendiert waren oder Fehlspezifikationen sind. Die Kenntnis der Information über die auftretenden Variablenschleifen liefert die **Modellstrukturanalyse.**

Handelt es sich um ein Verrechnungspreissystem von Einbezugsgrößenstellen und verrechnet keine Kostenstelle Leistungen auf sich selbst, dann liegt der Fall „interdependent abrechnender Kostenstellen“ vor. In einem solchen Fall kann man für jeden Verrechnungspreis einer Kostenstellen X eine reduzierte Gleichung ermitteln, in welcher nur die Verrechnungspreise, welche die übrigen Kostenstellen X in Rechnung stellen als symbolische Variable fungieren. Von diesem Gleichungssystem, welches nur Verrechnungspreise als symbolische Variable enthält, kann man eine Strukturmatrix aufstellen. Die Elemente $a_{i,j}$ in dem Gleichungssystem (5), welches die Verknüpfung der Verrechnungspreise beschreibt, führen zu einer solchen **Preisstrukturmatrix**, wenn man die Elemente, die ungleich null sind, 1 wählt.

Abb. 11 zeigt eine solche Preisstrukturmatrix für ein pharmazeutisches Unternehmen. Die schwarzen Kästchen entsprechen eine „1“ in der Matrix. Man erkennt, dass es drei simultane Preisschleifensysteme gibt. Zwei Preisschleifensysteme beschreiben eine Verrechnung zwischen nur zwei Kostenstellen. Das Dritte umfasst ein System von 37 interdependent abrechnenden Kostenstellen. Die Strukturmatrix dieses Preisschleifensystems ist (zwangsläufig)

13) Siehe hierzu Warren, J. M., Shelton, J. P., Simultaneous Equation Approach to Financial Planning, in: Journal of Finance 26 (1971), Seite 1123.

nicht dekomponierbar. Im vorliegenden Fall handelt es sich auch um eine rückführungsminimale Matrix, d. h., die Zahl der Elemente über der Hauptdiagonalen ist minimiert.[14)]

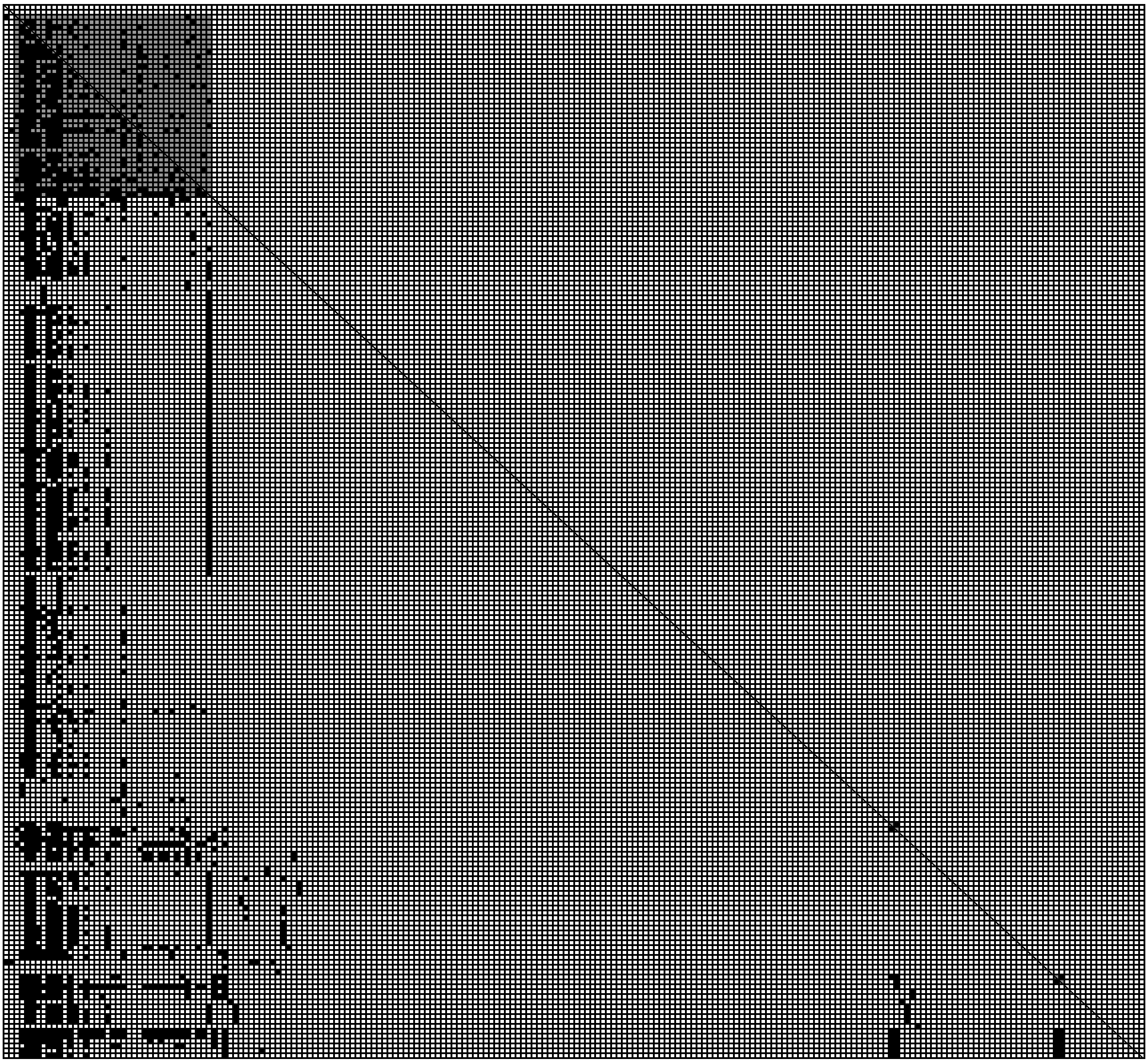


Abb. 11: Beispiel der Strukturmatrix eines Systems von Einbezugsgrößenkostenstellen

Der Benutzer kann am Bildschirm über die Wahl einer Zeile der Matrix in das Feld des Modelltableaus des Kosten-Leistungs-Modells einer Integrierten Zielverpflichtungsplanung springen, welches den Verrechnungspreis (mit seinem Zahlenwert) anzeigt. Er erhält dabei eine Übersicht der Zahl der Total- und Teilschleifen, die über den angesprochenen Verrechnungspreis der infrage stehenden Kostenstelle laufen.[15)] Die Verfolgung der Variablen einer ausgewählten Preisschleife verläuft dann über markierte Variablenfelder in den Modell-

14) Die sich ergebende Strukturmatrix ist nicht mit der Bestellsegmentmatrix auf Kostenstellenbasis eine Bestellsegmentanalyse identisch. Denn in dieser werden auch die Inputvariablen in die Kostenträgertableaus einer Kostenstelle erfasst, sowie die Bestellmengeninputs in Kostenartentableaus von Mehrbezugsgrößenstellen, über welche die Verrechnungsschleifen nicht laufen.

15) Wenn die Strukturmatrix stark besetzt ist, ist die Zahl der Total- und Teilschleifen so groß, dass es nicht möglich ist, sämtliche zu verfolgen oder sie auch nur anzuführen.

tableaus. Der Benutzer kann aber auch Informationen über sämtliche Total- und Teilschleifen erhalten, also nicht nur die, welche über einen vorgegebenen Verrechnungspreis verlaufen. Auch die Variablenketten in diesen Schleifen können über Modelltableaus verfolgt werden.

Das System identifiziert zur besseren Überschaubarkeit der Struktur simultaner Gleichungen auch die rückführenden Variablenbeziehungen, die sich aus der rückführungsminimalen Strukturmatrix ergeben. Diese sind für die Beurteilung des simultanen Hypothesen- und Definitionsgleichungssystems unter folgender Sicht von Belang: Würde man die Rückführungsbeziehungen streichen, dann hätte man ein „normales" rekursives Gleichungssystem, dessen definitorischer oder kausaler Status keiner besonderen Würdigung bedarf. Man kann daher zumindest einmal eine solche Streichung und ihre Konsequenzen gedanklich durchspielen.
Wenn Mehrbezugsgrößenstellen vorliegen, dann korrespondieren die Zeilen der Preisstrukturmatrix mit den Bezugsgrößeneinheiten der Mehrbezugsgrößenstellen. Wenn simultane Bestellmengenschleifensysteme zwischen Kostenartentableaus auftreten, dann kann entsprechend vorgegangen werden. Es wird für jede Bestellmenge eine reduzierte Gleichung ermittelt, in welcher nur die Bestellmengen als erklärende symbolische Variable fungieren. Auf der Basis dieses Gleichungssystems kann eine **Bestellmengenstrukturmatrix** entwickelt werden, die im formalen Aufbau der Preisstrukturmatrix in Abb. 11 entspricht. Eine solche Matrix besitzt simultane Nester, wenn Bestellmengenschleifen auftreten. Entsprechend können Verrechnungspreis- und Bestellmengenstrukturmatrizen von mehrstufigen Kostenträgersystemen aufgestellt werden.
Man kann auch die Strukturmatrix des gesamten Modells (siehe Abb. 2) aufstellen, in welcher jede Zeile mit einer endogenen Modellvariablen korrespondiert. Solche Strukturmatrizen sind aber nur für kleine Modelle verwendbar, da ein realistisches Modell mehrere hunderttausend Variablen besitzen kann. Das bereits erwähnte Kosten-Leistungsmodel von ThyssenKrupp Steel umfasste beispielsweise 2,6 Millionen Variablen.
Wenn eine Schleife über ein Beziehungstableau läuft, dann ist das Analysesystem der simultanen Gleichungen nicht in der Lage, eine semantische Klassifizierung in eine der beschriebenen sechs Schleifenarten vorzunehmen. In solchen Fällen kann der Benutzer die nicht dekomponierbare Matrix dieser Gleichungssysteme analysieren und in den Modelltableaus die Variablenschleifen verfolgen, um ihre empirische Akzeptanz zu beurteilen.

4. Lösung simultaner Gleichungssysteme in Planungsmodellen

Nach der Struktur- und Inhaltsanalyse simultaner Gleichungssysteme wenden wir uns schließlich ihrer numerischen Lösung zu. Eine Lösung liegt vor, wenn bei einer Durchrechnung des Modells für die endogenen Variablen der simultanen Nester Zahlenwerte ermittelt werden, die das Gleichungssystem befriedigen. Bei rekursiven Modellen kann man immer bestimmte Werte der endogenen Variablen berechnen. Dies ist aber bei endogenen Variablen simultaner Nester nicht zwingend der Fall. Über die zur Lösung verwendeten Verfahren und die Grenzen der Lösbarkeit sollte auch der reine Modellbenutzer etwas wissen, weil ihm sonst unklar bleibt, warum ein Modell nicht angewendet werden kann.

Wir unterscheiden im Folgenden zwischen linearen und nichtlinearen Modellen. Ein lineares simultanes System liegt vor, wenn die endogenen Variablen Y_1 bis Y_n eines Subsystems durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11} * Y_1 + ... + a_{1n} * Y_n + c_1 \\ Y_n &= a_{n1} * Y_1 + ... + a_{nm} * Y_n + c_n \end{aligned} \qquad (18)$$

beschrieben werden kann. Die Koeffizienten a_{ij} und c_i sind als numerische Werte vorzugeben. Die Matrix (a_{ij}) ist darüber hinaus nicht dekomponierbar. Es gibt verschiedene mathematische Verfahren und entsprechende Computerprogramme, um solche linearen Gleichungssysteme zu lösen, falls sie lösbar sind. Verfahren wie die Matrizeninversion oder das Gaußsche Eliminationsverfahren sollen als <u>zwingende Lösungsverfahren</u> bezeichnet werden. Denn sie führen zu einer Lösung, wenn diese existiert.
Die numerischen Werte der Koeffizienten a_{ij} und der Konstanten c_i in (18) müssen zur Verfügung stehen, um sie einem EDV-Programm zu übergeben, welches dieses zwingende Lösungsverfahren ausführt. Diese Werte stehen aber in dem Gleichungsmodell, mit welchem eine Unternehmensplanung betrieben wird, fast nie explizit zur Verfügung.
Dies gilt auch für das beschriebene Beispiel von Freidank. So wurde die Matrix (16) bereits aufgrund algebraischer Operationen aus den ursprünglichen Erklärungsgleichungen der vier endogenen Variablen bestimmt.[16)] Der Übergang zu der Matrizendarstellung (17), welche die gewünschten numerischen Konkretisierungen der a_{ij} und c_i besitzt, verlangt weitere Berechnungen.
Im Programmsystem der Integrierten Zielverpflichtungsplanung (INZPLA) besteht die Möglichkeit, für sämtliche lineare Subsysteme mit computeralgebraischen Operationen die Form (18) zu berechnen.[17)] Dieses Ermittlungsverfahren wird aber nicht primär verwendet. Vielmehr wird (wie bei fast allen Gleichungsgeneratoren) das sogenannte Gauß-Seidel-Verfahren praktiziert. Es handelt sich um ein iteratives Verfahren, welches im Vorgehen sehr einfach ist, aber <u>nicht zwingend</u> zu einer Lösung führt, wenn es eine gibt. Das Verfahren kann anhand von Abb. 12 demonstriert werden.

Die Variablen Y_1, Y_2, … eines infrage stehenden simultanen Nestes werden in beliebiger Reihenfolge angeordnet. In dieser Reihenfolge werden sie während des Iterationsprozesses mehrfach durchgerechnet. Zu Beginn wird den Variablen ein Anfangswert zugewiesen, der oft Null gewählt wird, wenn man keinen „besseren" kennt.[18)] Dann werden die Gleichungen (über eine Schleife) mehrfach durchgerechnet. Nach jeder Durchrechnung werden die Variablen nach einem Konvergenzkriterium beurteilt. Dies kann zum Beispiel

---

16) Siehe zu den ursprünglichen Gleichungen Freidank, C., a. a. O., Seite 266 ff.

17) Siehe hierzu auch: La, B., Strukturanalyse gleichungsorientierter Planungsmodelle, Diss. TU-Berlin 1998

18) Bessere Werte sind z. B. die endogenen Variablenwerte der Vorperiode oder die Werte einer vorherigen Durchrechnung des Systems mit anderen Basisgrößenwerten. Sie sind „besser", weil die Rechenprozedur dann wahrscheinlich eine geringere Zahl von Iterationsschritten benötigt.

$$\frac{Y_i^j - Y_i^{j-1}}{Y_i^{j-1}} \leq 10^{-9} \tag{19}$$

betragen. Der Index j gibt den (letzten) Iterationsschritt an. Sobald für alle Variablen Y_1, Y_2, … das Konvergenzkriterium eingehalten wird, wird der Iterationsprozess abgebrochen, denn die ermittelten Y-Werte erfüllen das Gleichungssystem in ausreichendem Maße.

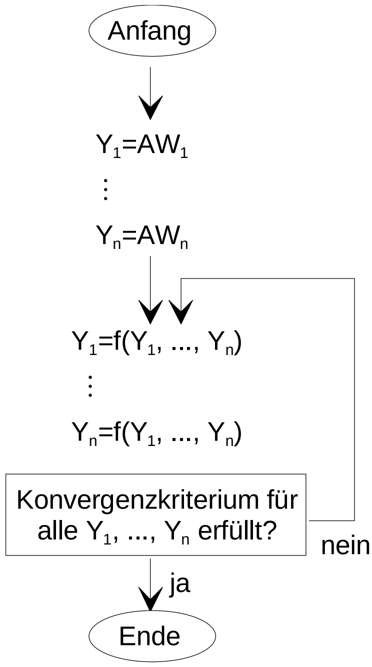


Abb. 12: Schematische Darstellung des Gauß-Seidel-Verfahrens

Das Verfahren ist so attraktiv, weil es nicht notwendig ist, die simultanen Subsysteme zu kennen. Die Schleife kann vielmehr um alle Erklärungsgleichungen eines Modells gelegt werden, die in beliebiger Reihenfolge sortiert sein können.[19] Auch ist die Konvergenzgeschwindigkeit sehr hoch und bei der heutigen Leistungsfähigkeit der Rechner fast immer ausreichend.
Ein höchst unbefriedigender Nachteil ist aber, dass das Gauß-Seidel-Verfahren nicht immer konvergiert, wenn eine Lösung existiert. Als Beispiel sei auf das lineare Gleichungssystem

$$x = 2y + 1 \tag{20}$$

$$y = 3x + 2 \tag{21}$$

verwiesen, welches, wie man leicht erkennt, die Lösung x = -1 und y = -1 besitzt. Dieses System konvergiert aber nicht. Der Iterationsverlauf für y ist beispielsweise

$$y^j = 6y^{j-1} + 5 \tag{22}$$

[19] Dies ist Grund, dass viele Gleichungsgeneratoren simultane Gleichungssysteme lösen, ohne dem Benutzer mitteilen zu können, welche simultanen Nester ein Modell enthält.

d. h. mit wachsendem Iterationsschritt j wächst y permanent.[20)] [21)] Es liegt die Frage nahe, ob die beschriebenen simultanen Mengen- und Preisschleifensysteme immer eine Lösung besitzen und ob diese mithilfe einer Gauß-Seidel-Prozedur ermittelbar ist.
Wie Münstermann gezeigt hat, besitzen echte Preisschleifensysteme also Systeme des Typs 1 und 3 auf Seite 5 immer eine Lösung und konvergieren auch immer, wenn das Gauß-Seidel-Verfahren angewendet wird.[22)] Die Konvergenz ist unabhängig davon, welche Anfangswerte gewählt werden. Sie wird durch die spezifischen Relationen der Bestellmengen in (3) bewirkt.[23)]
Wenn lineare simultane Gleichungssysteme vorliegen, dann ist es auch möglich, algebraische Lösungen der endogenen Variablen zu ermitteln. Unter der algebraischen Lösung einer endogenen Variablen versteht man eine Erklärungsgleichung dieser endogenen Variablen, welche nur Basisgrößen in symbolischer Form enthält. Die algebraische Lösung ist mit einer vollsymbolisch reduzierten Gleichung der endogenen Variablen identisch.
Handelt es sich um rekursive Gleichungssysteme, dann kann die reduzierte Gleichung einer Variablen X durch sukzessives Einsetzen (und Kürzen) der Gleichungen der erklärenden Variablen von X vorgenommen werden. Treten jedoch simultane Gleichungen auf, dann ist die (algebraische) Ermittlung der reduzierten Gleichungen ihrer Variablen keine triviale Angelegenheit. Sie ist mit Hilfe von Computeralgebrasystemen durchzuführen.[24)] Zur Demonstration soll das Beispiel (16) von Freidank verwendet werden. Die algebraische Lösung von Jnach in (16) ergibt:[25)]

```
JNACH=(((1.125*AUS + KA - 0.4375*A50 + VJVOR + 1.125*AUS*H*M +
1.125*AUS*TB + KA*TB - GA*H*M - 0.4375*A50*H*M -
0.4375*A50*TB + H*M*VA - TB*TAV) / (2 + TB + 2*H*M)) -
VJVOR + KA*H*M + GA*H*M + H*((1.125*AUS + KA - 0.4375*A50 +        (23)
VJVOR + 1.125*AUS*H*M + 1.125*AUS*TB + KA*TB - GA*H*M -
0.4375*A50*H*M - 0.4375*A50*TB + H*M*VA - TB*TAV) /
2 + TB + 2*H*M))*M - H*M*VA + TB*TAV) / (-1 - TB - H*M)
```

---

20) Man kann durch andere „Umstellungen" der endogenen Variablen, solche Gleichungssysteme u. U. auch eine Lösung mit dem Gauß-Seidel-Verfahren erreichen. Löst man beispielsweise (20) nach Y und (21) nach X auf, dann erhält man das simultane Gleichungssystem y=(x-1)/2 und x=(y-2)/3. Dieses konvergiert bei Anwendung des Gauß-Seidel-Verfahrens. Solche Normalisierungen und andere Umstellungen wie Änderungen der Reihenfolge sind für praktische Zwecke aber ungeeignet, weil der Benutzer in den Lösungsprozess eingreifen muss. Damit geht die Einfachheit des Gauß-Seidel-Verfahrens verloren.

21) Das Beispiel (17) von Freidank hat eine Lösung, die sich aber durch das Gauß-Seidel-Verfahren nicht ermitteln lässt. In Excel wird das Gauß-Seidel-Verfahren praktiziert. Die Formulierung dieses Gleichungssystems in Excel führt daher zu keiner Lösung.

22) Zum Beweis siehe Münstermann, H., Unternehmensrechnung, Wiesbaden 1969, Seite 141 f. siehe auch: Kruschwitz, L., Innerbetriebliche Leistungsverrechnung mit nicht exakten und iterativen Methoden, in: Kostenrechnungspraxis, (1979), H 3, Seite 112 ff.

23) Es lässt sich zeigen, dass das Preisschleifensystem (3) bis (5) immer zu einem linearen Gleichungssystem mit einer Matrix führt, bei welcher die Eigenwerte ihrer charakteristischen Gleichung zwischen 0 und 1 liegen. Diese Eigenschaft bedingt die von einem Anfangswert unabhängige Konvergenz.

24) Eine solche Möglichkeit existiert im Rahmen des INZPLA-Systems.

25) Sie wurde im Rahmen des Computeralgebraprogrammes INZPLA Systems ermittelt.

Man erkennt, dass schon bei der algebraischen Lösung eines so einfachen simultanen Gleichungssystems relativ umfangreiche Ausdrücke auftreten.

Das Programmsystem der Integrierte Zielverpflichtungsplanung (INZPLA) ist in der Lage, solche algebraischen Lösungen simultaner und rekursiver linearer Gleichungssysteme zu ermitteln. Allerdings ist darauf hinzuweisen, dass die algebraischen Lösungen in Abhängigkeit von der Zahl der nicht Null werdenden Matrixelemente extrem groß werden kann, sodass es praktische Grenzen der Anwendung gibt.
In Kosten-Leistungs-Modellen konvergieren, wie erwähnt, Preisschleifensysteme immer bei Anwendung des Gauß-Seidel-Verfahrens. Eine Konvergenz kann dagegen bei Bestellmengenschleifensystemen nicht garantiert werden. Wenn Bestellmengenschleifensysteme oder auch über Beziehungstableaus führende simultane Gleichungssysteme nicht konvergieren, dann wird das Iterationsverfahren nach einer vorgegebenen Zahl von Schritten (z. B. 500) abgebrochen.[26)] Bei linearen Systemen kann dann ein zwingendes Lösungsverfahren praktiziert werden. Zeigt sich, dass es keine Lösung gibt, dann ist das Modell nicht zu gebrauchen.

Bisher haben wir uns nur mit linearen simultanen Modellen befasst. Das Gauß-Seidel-Verfahren zeichnet sich, wie erwähnt, auch dadurch aus, dass es in der Lage ist, nichtlineare simultane Gleichungssysteme zu lösen. Der Erfolg einer Konvergenz hängt im Gegensatz zu den linearen Systemen auch von den Anfangswerten ab.[27)] Bei Verwendung von Standard-Kosten-Leistungs-Modellen ohne Beziehungstableaus werden echte Preis- und Mengenschleifen immer durch ein lineares Gleichungssystem beschrieben. Wenn der Modellentwickler aber unechte Bestellmengenbeziehungen generiert, dann kann er im Prinzip jede beliebige endogene Variable des Modells als Umlagegröße (gesamte unechte Bestellmenge) verwenden. Tritt in einem solchen Fall ein simultanes Gleichungssystem auf, dann ist nicht auszuschließen, dass es nichtlinear ist.

5. Behandlung simultaner Planungsmodelle in der Literatur

Die Modellierung simultaner Beziehungen dürfte bei der Formulierung eines Kosten-Leistungsmodells in der Praxis oft erforderlich sein. Im Rahmen der Analyse von Kosten-Leistungsmodellen in deutschen Unternehmen wie der VW AG, Daimler Benz, der Deutschen Bank, der BEWAG-Berlin, usw., zeigte sich, dass sämtliche Modelle simultane Gleichungssysteme enthielten.[28)] Simultane Gleichungen werden in Kosten-Leistungsmodellen vor allem zu Beschreibung interdependent abrechnender Kostenstellen verwendet.
Neben den mit echten Verrechnungspreisen interdependent abrechnenden Kostenstellen können Kosten-Leistungsmodelle, wie erwähnt, auch simultane Beziehungen besitzen, die durch die Verrechnung von Umlagen zustande kommen. In der Terminologie der Integrierten Ziel-

26) In dem Tabellenkalkulationsprogramm Excel 97, welches auch das Gauß-Seidel-Verfahren verwendet, sind es standardmäßig 100 Schritte.

27) Zu einem Beispiel siehe Zwicker, E., Simulation und Analyse dynamischer Systeme, a. a. O., Seite 343 f.

28) Siehe zu einer Übersicht der in einzelnen Unternehmen analysierten Modelle: Zwicker, E., Integrierte Zielverpflichtungsplanung und -kontrolle- ein Verfahren der Gesamtunternehmensplanung und –kontrolle, Berlin 2008, Seite 12.

verpflichtungsplanung liegen in diesem Falle Schleifen mit unechten Verrechnungspreisen vor. Schließlich können, wie erwähnt, auch noch Mengenschleifen zwischen den Kostenstellen und Mengenschleifen zwischen den Kostenträgern auftreten sowie Preisschleifen zwischen den Kostenträgern.

In der Literatur wird nur der Fall interdependent abrechnender Kostenstellen beschrieben. Kilger führt hierzu aus: „*Da die sekundären Kostenstellen ihre Leistungen nicht nur an die Hauptkostenstellen weiterleiten, sondern auch im gegenseitigen Leistungsaustausch stehen, kann der Kostenplan einer Sekundärkostenstelle X erst abgeschlossen werden, wenn die geplanten Verrechnungssätze aller übrigen Sekundärkostenstellen bekannt sind, von denen diese Stelle Leistungen bezieht. Diese Sätze lassen sich aber wiederum erst planen, wenn die Planung der Sekundärstelle X abgeschlossen ist, sofern sie von den übrigen Sekundärstellen Leistungen bezieht. [...] Das Problem lässt sich exakt nur simultan mithilfe eines linearen Gleichungssystems lösen.*“[29]

Kilger beschreibt danach ein simultanes Gleichungssystem zur Berechnung der Fixkostenverrechnungssätze von sieben Hilfskostenstellen. Dieses Beispiel zur Ermittlung der Fixkostensätze, welches 1988 veröffentlicht wurde, stellt auch im Vergleich mit der heutigen Literatur zur Kosten-Leistungsrechnung die am stärksten detaillierte Beschreibung der Modellierung und Lösung interdependenter Verrechnungsbeziehungen zwischen Hilfskostenstellen dar.

Ewert und Wagenhofer beschreiben das gesamte Problem der Verrechnung sekundärer Kosten, für welches hier ein differenziertes Modelltableausystem entwickelt wurde, anhand von drei Formeln auf einer Seite ihres 760 Seiten starken Werkes zur internen Unternehmensrechnung. Im Rahmen dieser einen Seite wird auch das Problem interdependent abrechnender Kostenstellen behandelt. Ewert und Wagenhofer bemerken hierzu:[30] „*Sollten sich die Hilfsstellen dagegen auch wechselseitig beeinflussen, liegt eine* ***komplexe Produktionsstruktur*** *vor.* [31]*...Unter der Annahme, dass pro Kostenstelle nur eine Bezugsgröße zur Anwendung kommt, können die Verrechnungssätze für innerbetriebliche Leistungen durch das folgende Gleichungssystem bestimmt werden (es handelt sich stets um Plangrößen, sodass vereinfachend der Index „P“ weggelassen wird):*

$$b_i * c_i = PK_i + \sum_{j=1}^{I} b_i * v_{ij} * c_j \qquad \text{für alle } i$$

Dabei bedeuten:

---

[29] Kilger, W. Flexible Plankostenrechnung und Deckungsbeitragsrechnung, 9. Auflage, Wiesbaden 1988, Seite 427.

[30] Ewert, R., Wagenhofer, A., Interne Unternehmensrechnung, …, a. a. O. ; Seite 90; Fettdruck erfolgte durch Ewert und Wagenhofer

[31] Wenn sich beispielsweise nur zwei Hilfskostenstellen gegenseitig beeinflussen, dürfte man wohl kaum von einer komplexen Produktionsstruktur sprechen. Für den Begriff der Komplexität eines Modells oder des Modellteils, der die Produktion beschreibt, gibt es keinen verbindlichen Maßstab. Der Grad der Komplexität dürfte jedoch von der Zahl der endogenen Variablen und dem Grade ihrer Verknüpfung abhängen, der sich anhand ihrer Strukturmatrix beurteilen lässt. Hierfür liefert die Graphentheorie bestimmte Komplexitätsmaße.

b_i – Planbezugsgröße der Hilfskostenstelle i, i= 1,…,I

c_i – Proportionaler Planverrechnungssatz der Hilfsstelle i

PK_i – Gesamte proportionale primäre Plankosten der Hilfsstelle i

v_{ij} - Proportionaler Planverbrauch an innerbetrieblicher Leistung der Stelle j je Bezugsgrößeneinheit der Stelle i, i= 1, …, I

Diese Gleichung wird von den Autoren nach dem Grenzkostensatz c_i aufgelöst. „*In Vektor- und Matrizenschreibweise lässt sich (ihre) Lösungsstruktur wie folgt charakterisieren:*

$$C = pk + V * c \quad \rightarrow c = (E - V)^{-1} * pk$$

C – Spaltenvektor der c_i

Pk – Spaltenvektor der pk_i

E - I x I –Einheitsmatrix

V - I x I Matrix der v_{ij} "

Es handelt sich um eine bemerkenswert knappe Darstellung des Systems der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung. Im Rahmen der Darstellung des Modelltableausystems einer Integrierten Zielverpflichtungsplanung wurden diese Zusammenhänge dagegen in einem Umfang von 133 Seiten beschrieben.[32)] Dies erwies sich (nach Auffassung des Verfassers) als notwendig, um die im Rahmen einer Plankostenrechnung anfallenden strukturellen Beziehungen in angemessener Form beschreiben zu können. Die Darstellung der Autoren bezieht sich nur auf die Grenzkostenversion einer Plankostenrechnung.

Der Fall, dass eine solche Verrechnung auch für Plan-Vollkosten, Ist-Grenzkosten und Ist-Vollkosten existiert, wird von Ewert und Wagenhofer nicht erwähnt. Weiterhin wird der Fall nicht berücksichtigt, dass Hauptkostenstellen auch auf Hilfskostenstellen verrechnen. Unberücksichtigt bleibt auch der Fall, dass Kostenträger im Rahmen einer mehrstufigen Fertigung auf Hauptkostenstellen verrechnen und diese wieder Leistungen für Hauptkostenstellen erbringen, mit der Folge, dass simultane Gleichungen auftreten. Weiterhin bleiben simultane Gleichungen zwischen Umlagen unberücksichtigt, die in der behandelten Grenzkostenversion allerdings kaum auftreten, weil die Umlagegrößen selten als erklärende Variable einer Kosten- oder Verbrauchsmengenhypothese dienen. Das Auftreten von Mengenschleifen bleibt ebenfalls unberücksichtigt.[33)]
Schweitzer und Küpper führen ein Beispiel an, welches die Verrechnung zwischen vier Kostenstellen beschreibt.[34)] Sie erörtern das simultane Gleichungssystem, welches zur Lösung dieser interdependent abrechnenden Kostenstellen notwendig ist und zeigen, wie dieses Gleichungssystem im Rahmen der Matrizenrechnung (mithilfe einer Matrizeninversion) gelöst wird. Dieses Lösungsverfahren wurde im vorliegenden Text nicht erörtert, sondern nur das

32) Siehe: Zwicker, E., Das Modelltableausystem von Kosten-Leistungsmodellen im System der Integrierten Zielverpflichtungsplanung, Berlin 2000

33) Darauf weisen die Autoren selbst hin.

34) Schweitzer, M., Küpper, H. U., Systeme der Kostenrechnung, 9. Auflage, Landsberg 2008. Dieses Zitat wurde 2009 der neusten Auflage angepasst.

Gauß-Seidel-Verfahren. Der Grund hierfür ist, dass das Gauß-Seidel-Verfahren viel einfacher zu erklären und auch für nichtlineare Systeme anwendbar ist. Dabei erweist es sich, wie erwähnt, bei den infrage stehenden interdependent abrechnenden Kostenstellen stets als konvergent und liefert daher immer eine vom Benutzer beliebig genau wählbare Lösung. Schweitzer und Küpper weisen anschließend auch darauf hin: „Eine *relativ genaue* ***Näherungslösung*** *lässt sich durch die Anwendung des iterativen Verfahrens finden.*“ (S.144) Die Autoren verwenden ein Iterationsverfahren, welches sie anhand von Abb. 13 beschreiben.

Die Spalten des Abrechnungsschemas korrespondieren mit den vier Kostenstellen V1, V2, E3 und E4, welche gegeneinander Leistungen verrechnen. Die Werte in der ersten Zeile sind die Summen der primären fixen Kosten, welche auf den Kostenstellen anfallen. Die Kostenstelle V1 verteilt ihre Kosten nach festen (Bestellmengen-)Anteilen auf V2 (Anteil: 0,2) auf E3 (Anteil: 0,5) und E4 (Anteil: 0,3).

V1	V2	E3	E4
8.000,00	6.000,00	10.000,00	20.000,00
	1.600,00	4.000,00	2.400,00
	7.600,00		
1.520,00		3.040,00	3.040,00
1.520,00			
	304,00	760,00	456,00
	304,00		
60,80		121,60	121,60
60,80			
	12,16	30,40	18,24
	12,16		
2,43		4,86	4,86
2,43			
	0,49	1,22	0,73
9.583,23	7.916,65	17.958,08	26.041,43

Abb. 13: „Iteratives Verfahren“ am Beispiel von interdependent abrechnenden Kostenstellen nach Schweitzer und Küpper

Dabei erhält V2 eine Kostenverrechnung von 1.600 €. Zusammen mit den primären Kosten in V2 sind diese 7.600 €. Diese Kosten werden wiederum nach einem festen Verteilschlüssel von V2 auf die übrigen Kostenstellen verrechnet. Davon erhält V1 einen Anteil von 0,2, d. h. 1.520 €. Diese 1520 € verteilt V1 wieder nach dem erwähnten Anteilsschlüssel (0,2 - 0,5 - 0,3) auf die übrigen Kostenstellen. Der wechselseitige Verrechnungsprozess zwischen V1 und V2 wird so lange fortgesetzt, bis die von V2 an V1 zugerechneten Kosten einen bestimmten Grenzwert von z. B. 1 € unterschreiten. Die Verfasser bemerken zu ihrem Beispiel: „*Gemäß dem Beispiel in Abb. 13 werden zuerst die Kosten einer Vorkostenstelle auf andere Stellen verteilt. Danach kann dieselbe Stelle bei der Verteilung einer anderen Stelle wieder belastet* *werden, wenn sie von dieser Stelle Leistungen empfängt. Es kommt also zu einer mehrfachen Entlastung und Belastung der Vorkostenstellen.*[35)]

Bei der Durchführung dieses iterativen Verfahrens sollte aber beachtet werden, dass die in Abb. 13 beschrieben Iteration nicht nur zwischen V1 und V2, sondern danach zwischen V1 und E3 sowie V1 und E4 vorzunehmen ist. Danach zwischen V2 und E3 und E4 usw. Es handelt sich immer um die Verrechnung einer Schleifenbeziehung zwischen zwei Kostenstellen <u>ohne</u> Berücksichtigung der Verrechnungen der anderen Kostenstellen.

Im Falle des Beispiels sind daher 6 solcher Rechnungen, wie in Abb. 13, vorzunehmen und dieser Zyklus ist unter Umständen noch einmal zu wiederholen, falls sich z. B. bei der Verrechnung von E3 auf E4 herausstellen würde, dass damit auf V1 Kosten verrechnet würden, die über der 1€-Grenze liegen und daher wieder zu verteilen wären. Für realistische Systeme ist dieses Verfahren ungeeignet. Die Autoren behaupten, dass diese „iterative Methode" im „*Modul Controlling der betriebswirtschaftlichen Standardsoftware SAP R/3 eingesetzt*" wird.[36)] Diese Behauptung ist aber nicht zutreffend. Im SAP-System wird das Gauß-Seidel-Verfahren verwendet und das arbeitet, wie beschrieben, etwas anders und ist auch prozedural wesentlich einfacher.

Die Autoren weisen darauf hin, dass die iterative Methode zu *„einer relativ genauen Näherungslösung*" (S.144) führt. Im Hinblick auf die Gauß-Seidel-Prozedur lässt sich hier nur sagen: Durch eine entsprechende Wahl des Konvergenzkriteriums ist die Gauß-Seidel-Prozedur „genauso genau" wie die (computergestützte) numerische Lösung mit Hilfe von Matrizenverfahren, die die Berechnung einer inversen Matrix erfordern und von Schweitzer und Küpper offenbar für das genauere Verfahren gehalten werden.

Schweitzer und Küpper liefern, abgesehen von Kilger, die am weitest gehende Beschreibung simultaner Gleichungssysteme in einem systematisierenden Standardwerk. Sie erörtern das Auftreten simultaner Gleichungen nur für den Fall interdependent miteinander abrechnender Kostenstellen. Preisschleifen zwischen Kostenträgerstellen und Mengenschleifen zwischen Hilfskostenstellen und Kostenträgern werden von ihnen nicht erörtert. Ebenfalls wird nicht auf den Fall aufmerksam gemacht, dass zwischen Umlagen simultane Beziehungen auftreten können. Die Möglichkeit des Auftretens von weiteren simultanen Beziehungen in Kosten-Leistungsmodellen wird nicht behandelt wie der Fall, dass ein Bereichsleiter eine Prämie (Kostengröße) in Abhängigkeit von seinem Bereichsgewinn erhält. Auch steht nicht zur Diskussion, wie man ein simultanes Gleichungssystem überhaupt im Rahmen eines generierten Kosten-Leistungsmodells entdeckt.

Jeder Autor hat die Freiheit zu entscheiden, welchen Themen er sich in seinem Werk besonders widmen möchte. Im Rahmen einer modellbasierten Erörterung der Kosten-Leistungsrechnung, d. h. der Zielrichtung dieses Werkes, wird die ausführliche Behandlung von simultanen Gleichungssystemen aber für angemessen gehalten.

In dem weltweit am häufigsten verbreiteten Standardwerk zur Kosten-Leistungsrechnung von Horngren wird an einem Beispiel die interdependente Abrechnung zwischen zwei Kostenstellen (*reciprocal allocation method*) anhand von zwei Gleichungen beschrieben. Zur Er-

---

35) Schweitzer, M., Küpper, H. U., a. a. O., Seite 144. Im Zitat wurde der Verweis auf die Abb. 2-28 im Originaltext durch die Abb. 13 in diesem Text ersetzt.

36) Schweitzer, M., Küpper, H. U., a. a. O., Seite 143.

weiterung dieses Beispiels bemerkt Horngren: „*When there are more than two support departments with reciprocal relationships, computer programs can be used to calculate the complete reciprocated cost of each support department*“.[37)]

Das Programmsystem der Integrierten Zielverpflichtungsplanung identifiziert jedes simultane Gleichungssystem und versucht, es mit einer Gauß-Seidel-Prozedur zu lösen. Dies ist, wie erwähnt, bei Preisschleifen immer möglich. Wenn bei unechten Preisschleifen oder sonstigen interdependenten Beziehungen eine Lösung nicht möglich, d. h. die Gauß-Seidel-Prozedur konvergiert nicht, dann wird der Benutzer darüber informiert.

Preisschleifensysteme werden auch im CO-Modul des R/3-Systems (oder ECC-Systems) von SAP immer gelöst. Simultane Gleichungssysteme von Nicht-Preisschleifen (simultane Beziehungen zwischen Umlagen) werden weder erkannt noch gelöst.[38)] Das gilt auch für Bestellmengenschleifen zwischen Kostenstellen oder Kostenträgern. Sie können höchstens, falls ein Benutzer sie erkennt, durch eine manuell gesteuerte Gauß-Seidel-Prozedur gelöst werden.

Wie erwähnt, können auch simultane Gleichungen zwischen unechten Bestellmengen auftreten. Im SAP-System entspricht dies dem Auftreten von simultanen Gleichungen zwischen Umlagen. Auch hier besteht im Rahmen des SAP-Systems, solche die Verrechnung von Umlagen beschreibende simultane Gleichungen mithilfe einer Gauß-Seidel-Prozedur zu lösen.

Wenn aber die Verrechnung der Umlagen von Parametern abhängen (wie z. B. von bestimmten sekundären Kosten), die im Rahmen der Ermittlung der Preise eines Preisschleifensystems (in SAP: Der Tarifermittlung) bestimmt werden, dann ist eine korrekte Leistungsverrechnung nicht möglich. Die auftretenden simultanen Gleichungen werden von dem SAP-System nicht erkannt und mithilfe einer Rechenprozedur gelöst. Wie Brück feststellt, ist ein solcher Fall der Verquickung von Preisschleifensystemen und Umlagesystemen „in der Praxis der Normalfall und nicht die Ausnahme.“ [39)]

In einem solchen Fall kann der Benutzer nur durch einen Trick versuchen, eine korrekte Verrechnung zu bewerkstelligen. Er muss eine wechselweise eine „handgesteuerte“ Preisiteration (Tarifiteration) und Umlageniteration durchführen. Im Lichte einer Gauß-Seidel-Prozedur werden bei der ersten Preisiteration die Gleichungen durchgerechnet, die die Verrechnungspreise beschreiben. In einem nächsten Schritt, dem ersten Schritt der Umlageiteration, werden die Gleichungen durchgerechnet, welche die Umlagen erklären. Dann wird wieder eine Durchrechnung der Preisgleichungen vorgenommen und wieder der Umsatzgleichungen usw. Da es kein explizites Konvergenzkriterium für die Variablen beider Gleichungssysteme gibt, schaut man sich die Werte vor und nach dem i-ten „Iterationsdoppelschritt“ an. Ändern sie sich nicht mehr stark, dann wird die Entscheidung getroffen, dass die Werte korrekt bestimmt sind. Ein solches Vorgehen beschreibt nicht den Stand der Forschung.

---

37) Horngren, C.T., Bhimani, A., Datar, S.M. Foster, G. Management and Cost Accounting, London 2002, Seite 145.

38) Kilger beschreibt, wie erwähnt, in seinem Werk ein System von 14 miteinander abrechnenden Hilfskostenstellen und entwickelt hierfür eine 14x14-Matrix, deren 68 Elemente die fixen Bestellmengen zwischen diesen Hilfskostenstellen beschreibt (S. 496) Anhand dieser Matrix identifiziert er sieben Hilfskostenstellen, welche interdependent miteinander abrechnen. Dazu bemerkt er: „ Die Mengenangaben in Tabelle 74 lassen erkennen, dass nur zwischen den Kostenstellen … interdependente Beziehungen bestehen“ (S. 468). Ein Leser möge einmal selbst versuchen, diese interdependenten Beziehungen anhand der Matrix zu identifizieren.

39) Brück, U., Praxishandbuch, a. a. O., S. 101

In der Literatur wird von manchen Autoren auch das sogenannte **Treppenumlageverfahren** zur Verrechnung der Umlagen zwischen den Kostenstellen beschrieben. Dieses Verfahren soll unabhängig davon angewendet werden, ob interdependent miteinander verrechnende Kostenstellen vorliegen oder nicht. Im Lichte eines Standard-Kosten-Leistungs-Modells wird hier so vorgegangen: Die Bereichsmodelle der Hilfskostenstellen werden als Teilmodelle des Standard-Kosten-Leistungs-Modells prozedural angeordnet und dann Schritt für Schritt durchgerechnet.[40)] Jede Durchrechnung eines Kostenstellenmodells X ergibt den Kostenverrechnungssatz, dessen Produkt mit den Bestellmengen der nachfolgenden Kostenstellen N_1 bis N_n, welche bei X eine Bestellung vornehmen, die Kostenwerte ergeben, welche auf die Kostenstellen N_1 bis N_n zu verrechnen sind.

Zu diesem Verfahren bemerken beispielsweise Schweitzer und Küpper:[41)] „*Das zentrale Problem bei diesem Verfahren besteht in der Festlegung der Reihenfolge der Kostenstellen. Da in der Realität häufig gegenseitige Leistungsbeziehungen vorliegen, muss man die Reihenfolge so wählen, dass die jeweils kleineren Leistungsströme unterdrückt werden und der Verrechnungsfehler möglichst klein gehalten wird.*“.[42)]

Angesichts der heute zur Verfügung stehenden Möglichkeiten zur Lösung simultaner Gleichungssysteme im Rahmen der elektronischen Datenverarbeitung ist es unangemessen, das „Treppenumlageverfahren“ überhaupt noch als ein Verfahren zur Kostenverrechnung zu erwähnen. Versucht man, die verbale Beschreibung dieses Verfahrens formal zu rekonstruieren, dann bedeutet dies, dass ein simultanes Gleichungssystem durch ein „vereinfachtes“ rekursives ersetzt wird. Dabei wird so vorgegangen, dass Koeffizienten über einer (vom Anwender zu ermittelnden) rückführungsminimalen Koeffizientenmatrix des simultanen Gleichungssystems Null gesetzt werden. Damit wird auf eine exakte Weiterverrechnung der Kosten verzichtet.

Wenn man ein einfaches System der Ist- oder Plankostenrechnung entwickeln will, dann sollte man das mit dem Tabellenkalkulationsprogramm Excel tun. Dazu kann man beispielsweise die Modelltableaus einer Integrierten Zielverpflichtungsplanung verwenden. Wenn in diesem System interdependent verrechnende Kostenstellen auftreten, wird das simultane Gleichungssystem bei der Durchrechnung von Excel erkannt und (unter Verwendung einer Gauß-Seidel-Prozedur) gelöst. Bei diesem Stand der Technik entspricht die Propagierung des Treppenumlageverfahrens in einem systematischen Werk zur Kostenrechnung nicht mehr dem neusten Stand der Entwicklung und könnte allenfalls in einer Geschichte des Rechnungswesens seinen Platz finden.

---

40) Diese Anordnung erfolgt in dem Modellsystem so, dass die strukturellen Gleichungen des gesamten Modells prozedural angeordnet werden. Diese prozedurale Anordnung lässt sich aber so interpretieren, dass die Modelle der Hilfskostenstellen in einer prozeduralen Anordnung durchgerechnet werden.

41) Schweitzer, M., Küpper, H. U., a. a. O. Seite 136.

42) Eine rückführungsminimale Verrechnungsmatrix erhält man, wenn man die Zeilen und Spalten der Kostenverrechnungswerte in der Verrechnungsmatrix der Hilfskostenstellen so sortiert werden, dass die Summe der Kostenwerte über der Hauptdiagonalen minimiert wird. Die Kostenwerte über der Hauptdiagonalen korrespondieren mit den zu streichenden Koeffizienten der Koeffizientenmatrix. Eine solche exakte Verfahrensvorschrift formulieren Schweizer und Küpper allerdings nicht. Eine Kostenwert-Verrechnungsmatrix der Hilfskostenstellen zeigt der von Schweitzer und Küpper beschriebenen BAB. Diese Verrechnungsmatrix stellt bereits eine Dreiecksmatrix dar, d. h., die Hilfskostenstellen rechnen nicht interdependent miteinander ab. Daher weisen die Autoren auch darauf hin (S. 149), dass in diesem Fall das Treppenumlageverfahren praktiziert wird.

Bei der Beurteilung simultaner Gleichungssysteme in Kostenmodellen zeigen sich bei manchen Autoren gewisse Unsicherheiten. So bezeichnet Schneider die „*Verrechnung innerbetrieblicher Leistungen*“ als ein unzulässiges Verfahren: Dies begründet Schneider so: „*Schwierigkeiten ergeben sich, wenn mehrere Kostenstellen sich gegenseitig Leistungen erstellen. Hierfür wird in der Kostentheorie die Aufstellung simultaner Gleichungen gefordert. Da diese Aufgabe praktisch nicht zu bewältigen ist, werden bei einer Vorgabe, vollständige Kostenentlastung der leistenden Kostenstelle zu verwirklichen, willkürliche Probierverfahren (Iterationsverfahren) gewählt.*”[43)] Diese Bemerkung von Schneider enthält ein gerütteltes Maß an Unkenntnis. Schneider meint, dass die Aufgabe „*Aufstellung von simultanen Gleichungen*“ praktisch nicht zu bewältigen ist. Dies ist unzutreffend. Mit Hilfe von Konfigurationssystemen (wie dem SAP-System, oder auch dem INZPLA-System) kann man beliebig große simultane Gleichungssysteme interdependent miteinander abrechnender Kostenstellen „*aufstellen*“ d. h. modellieren.[44)] In der Praxis finden sich interdependente Preisschleifensysteme, die durch Hunderte von Gleichungen beschrieben werden, deren „*Aufstellung*“ keine Schwierigkeiten bereitet. Offenbar meint Schneider aber gar nicht die „*Aufstellung simultaner Gleichungen*“ sondern die „Lösung von simultanen Gleichungen“, denn zu dieser „*Aufgabe*“ einer Aufstellung (gemeint ist aber Lösung) sind seiner Auffassung nach „*willkürliche Probierverfahren*“ möglich, die offenbar zu keiner „*vollständigen Kostenentlastung*“, d. h. einer Lösung der simultanen Gleichung führen. Diese Behauptung trifft aber definitiv nicht zu. Denn Preisschleifensysteme, welche Schneider allein anspricht, sind immer lösbar und zwar mit einer beliebig vorgegebenen Genauigkeit.[45)]

43) Schneider, D., Betriebswirtschaftslehre, Bd. 2 Rechnungswesen, München 1994, Seite 394.

44) Mit Excel kann man kleinere simultane Gleichungssysteme lösen.

45) Die Zahl der Iterationen liegt bei einer Genauigkeit von $(V_i-V_{i-1})/V_i \leq 10^{-6}$ meist unter 20 (V_i – Wert der Variablen im i-ten Iterationsschritt.