Simultane und rekursive Gleichungssysteme in der Kosten- und Leistungsrechnung

Prof. Dr. Eckart Zwicker

In: Jahnke, B. (Hrsg.),
IT-gestützte betriebswirtschaftliche Entscheidungsprozesse

Wiesbaden 2001

Prof. Dr. Eckart Zwicker

Simultane und rekursive Gleichungssysteme in der Kosten- und Leistungsrechnung

Kosten-Leistungsmodelle sind Modelle zur Ermittlung des Ist- oder Plan-Betriebsergebnisses. Sowohl für die Ist- als auch die Planvariante können Kosten-Leistungsmodelle in zwei Versionen auftreten. Diese bilden die Voll- und Grenzkostenversion. Die Definitionsgleichung der Vollkostenversion zeigt den folgenden Aufbau:

(1) $BER = AM_1 * (P_1 – VKS_1) + ... + AM_n * (P_n – VKS_n)$

BER	–	Betriebsergebnis
AM_i	–	Absatzmenge des Artikels i
P_i	–	Absatzpreis des Artikels i
VKS_i	–	Vollkostensatz des Artikels i

Die Grenzkostenversion besitzt die folgende Definitionsgleichung des Betriebsergebnisses:

(2) $BER = AM_1 * (P_1 – GKS_1) + ... + AM_n * (P_n – GKS_n) – FK$

GKS_i	–	Grenzkostensatz des Artikels i
FK	–	Fixe Kosten

In den Betriebsergebnisgleichungen bilden die Kostensätze und die Fixkosten die endogenen Variablen des Kosten-Leistungsmodells. In konkreten Anwendungen werden diese Größen durch Gleichungssysteme im Umfang von 50.000 und mehr Variablen erklärt.

Im Hinblick auf die Art der strukturellen Modellbeziehungen dieser Kosten-Leistungsmodelle kann man zwischen rekursiven und simultanen Modellen unterscheiden. Diese Unterscheidung ist von Bedeutung, weil die beiden Modelltypen ein unterschiedliches Lösungsverfahren erfordern. Die Zweiteilung hat aber auch eine semantische Relevanz. Simultane Modelle führen zu Interpretationsschwierigkeiten. Ihre Verwendung erfordert daher eine besondere Rechtfertigung.

Aus diesen Gründen wird im folgenden der strukturelle Aufbau simultaner Kosten-Leistungsmodelle, die Interpretation ihrer Beziehungen sowie die Möglichkeiten der Berechnung ihrer endogenen Variablen erörtert.

Simultane und rekursive Modelle unterscheiden sich anhand des Aufbaus ihrer Strukturmatrix. Sie ist eine binäre, quadratische Matrix, deren Werte auf folgende Weise ermittelt werden. Die strukturellen Gleichungen eines vorliegenden Modells werden in einer beliebigen Reihenfolge untereinander angeordnet. Die Zahl der Zeilen bzw. Spalten der Strukturmatrix dieses Modells entspricht der Zahl der Gleichungen (n). Die endogene Variable der i-ten Gleichung soll mit der i-ten Zeile und Spalte der Strukturmatrix korrespondieren. Die erste endogene Variable der Gleichungsreihenfolge korrespondiert daher mit der ersten Zeile und Spalte der Strukturmatrix. Die zweite endogene Variable mit der zweiten Zeile und Spalte usw. Eine Zeile i der Strukturmatrix wird durch folgende Vorschrift spezifiziert:

Wenn die mit der Zeile i (i = 1, …, n) korrespondierende strukturelle Gleichung als erklärende Variable die endogene Variable Y_j (j = 1, …, n) enthält, dann trage in die Zeile i und die Spalte j eine Eins ein. Weise allen anderen Feldern eine Null zu.

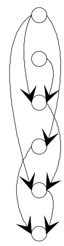
Gelingt es, eine solche (unsortierte) Matrix eines Modells durch Zeilen- und entsprechende Spaltenaustausche (Permutationen) so zu sortieren, daß eine trianguläre Strukturmatrix (Dreiecksmatrix) zustande kommt, dann handelt es sich um ein *rekursives Modell.*

Strukturmatrix

	U	KO	BER	KU	UR	ROI
U=P*AM						
KO=FK+VSK*AM						
BER=U-KO	1	1				
KU=U/KAP	1					
UR=BER/U	1		1			
ROI=KU*UR				1	1	

Proze-
durale
Richtung

Kausaldiagramm



U - Umsatz
KO - Gesamtkosten
KU - Kapitalumschlag
ROI - Return on Investment
P - Absatzpreis
FK - Fixe Kosten
KAP - Gesamtkapital
BER - Betriebsergebnis
AM - Absatzmenge
VSK- Variable Stückkosten
UR - Umsatzrentabilität

Abb. 1: Strukturmatrix des RoI-Definitionssystems

Abb. 1 zeigt eine Sortierung der Gleichungen des RoI-Definitionssystems, die zu einer triangulären Strukturmatrix führt. Die Reihenfolge der Gleichungen, welche mit den Zeilen einer solchen triangulären Strukturmatrix korrespondieren, wird als *prozedurale Reihenfolge* bezeichnet. Ein Modell besitzt oft mehrere prozedurale Reihenfolgen bzw. trianguläre Strukturmatrizen.

Sind die Gleichungen in einer prozeduralen Reihenfolge angeordnet, so können sie in dieser Reihenfolge durchgerechnet werden, um die endogenen Variablenwerte zu ermitteln. In einem Computerprogramm, welches diese Durchrechnung vornimmt, müssen die Anweisungen zur Berechnung der endogenen Variablen diese prozedurale Reihenfolge einhalten. Ansonsten fehlen dem Rechner die Zahlenwerte für bestimmte endogene Variablen, die als Erklärungsgrößen in einer Gleichung auftreten. Bei der Entwicklung eines Modells ist es erwünscht, daß der Benutzer die Modellgleichungen zur Erhöhung der Modellierungsfreiheit in beliebiger Reihenfolge eingeben kann. Die verwendete Modellierungssprache (Gleichungsgenerator) sollte immer in der Lage sein, die Gleichungen in eine prozedurale Reihenfolge zu überführen, um damit eine Berechnung der endogenen Variablen zu ermöglichen. Aus der sortierten Strukturmatrix läßt sich auch ein Kausaldiagramm ableiten (siehe Abb. 1), welches die Variablenbeeinflussung zeigt. Es zeichnet sich bei einem rekursiven Modell stets dadurch aus, daß alle Einflußpfeile in dieselbe Richtung zeigen.

Wenn es *nicht* möglich ist, die Gleichungen so zu sortieren, daß sich eine trianguläre Strukturmatrix ergibt, dann liegt ein *simultanes Modell* vor. Eine Strukturmatrix, die sich nicht in eine trianguläre Form überführen läßt, wird als *nicht dekomponierbare Strukturmatrix* bezeichnet.

Ein simultanes Modell kann im Extremfall aus einer einzigen Strukturmatrix bestehen, die nicht dekomponierbar ist. In fast allen Fällen besitzen aber simultane Kosten-Leistungsmodelle eine Strukturmatrix mit einer oder mehreren nicht dekomponierbaren Teilmatrizen.

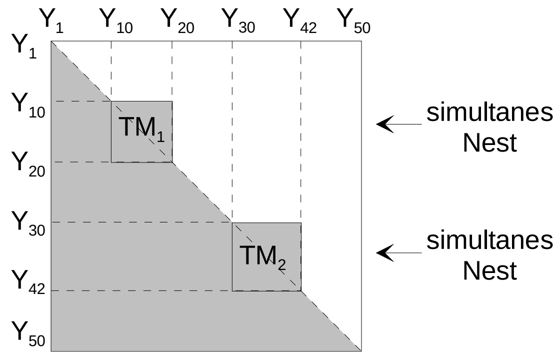


Abb. 2: Strukturmatrix eines simultanen Modells mit simultanen Nestern

Abb. 2 zeigt eine Strukturmatrix, in der alle Elemente über der Hauptdiagonalen Null sind, wenn man von den Teilmatrizen TM_1 und TM_2 absieht. Unter der Hauptdiagonalen können Nullen oder auch Einsen stehen. Die Teilmatrizen TM_1 und TM_2 sind nicht dekomponierbar. Dies bedeutet, daß die mit ihnen korrespondierenden Variablen ein simultanes Gleichungssystem bilden. Von einem simultanen Modell soll immer dann gesprochen werden, wenn ein vorliegendes Modell zumindest ein simultanes Gleichungssystem als Subsystem enthält. Diese simultanen Gleichungssysteme, die auch als *simultane Nester* bezeichnet werden, müssen identifiziert werden, um eine erfolgreiche Modelldurchrechnung zu ermöglichen. Besitzt ein Modell eine Strukturmatrix mit simultanen Nestern, dann liefert diese eine prozedurale Reihenfolge, welche durch diese simultane Nester unterbrochen wird. Die Rechnung zur Bestimmung der Werte der endogenen Variablen in Abb. 2 vollzieht sich beispielsweise in mehreren Schritten. Zur Berechnung der Variablen Y_1 bis Y_{10} wird wie bei einem rekursiven Modell vorgegangen. Zuerst wird Y_1 berechnet, dann Y_2 usw. Nach der Ermittlung von Y_9 tritt das simultane Nest auf. Dessen endogene Variablenwerte müssen mit Hilfe besonderer Prozeduren ermittelt werden, auf welche wir noch eingehen. Sind die Werte Y_{10} bis Y_{20} bestimmt, wird die Berechnung bis Y_{29} wieder entsprechend der prozeduralen Reihenfolge vorgenommen usw.
Aus einer nicht dekomponierbaren Matrix läßt sich kein Kausaldiagramm ableiten, dessen sämtliche Einflußpfeile in die angestrebte prozedurale Richtung zeigen. Es ergibt sich vielmehr mindestens ein Pfeil, der nicht in die prozedurale Richtung zeigt.

	A	B	C	D	E
A					1
B	1		1		
C		1			
D			1		
E				1	

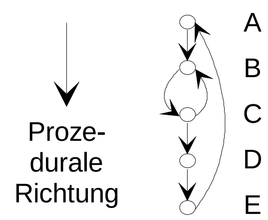


Abb. 3: Beispiel einer nicht dekomponierbaren Strukturmatrix und ihres Kausaldiagramms

Abb. 3 zeigt eine nicht dekomponierbare Strukturmatrix. In diesem Fall bildet das gesamte Modell mit seinen fünf Variablen ein simultanes Nest. Man erkennt, daß es zwei rückführende Pfeile gibt. Diese korrespondieren mit den Zahlenwerten über der Hauptdiagonalen. Anhand des Kausaldiagramms soll auf eine Eigenschaft eines simultanen Gleichungssystems aufmerksam gemacht werden: Alle Variablen liegen in mindestens einer *Totalschleife*. Dies ist eine Einflußkette, die über alle Variablen führt. In Abb. 3 wird eine Totalschleife durch die Kette A-B-C-D-E-A reprä-

sentiert. Neben Totalschleifen gibt es aber auch Schleifen, die nicht alle Variablen umfassen. Diese werden als *Teilschleifen* bezeichnet (z. B. B-C-B in Abb. 3).
Wenn ein simultanes Gleichungssystem vorliegt, muß man sich immer die Frage stellen, ob die feststellbaren Schleifen eine 'vernünftige empirische Interpretation' zulassen. Auf diese Frage kommen wir noch zurück, indem bestimmte Schleifentypen analysiert werden.
Zur besseren Analyse der Schleifenstruktur eines simultanen Gleichungssystems ist es empfehlenswert, eine bestimmte Darstellungsform der nicht dekomponierbaren Strukturmatrix und damit auch ihres korrespondierenden Kausaldiagramms zu realisieren. Diese ist eine *rückführungsminimale* Strukturmatrix. Eine nicht dekomponierbare Strukturmatrix läßt unterschiedliche Sortierungen ihrer Zeilen und Spalten (Permutationen) zu. Eine rückführungsminimale Strukturmatrix ist eine nicht dekomponierbare Strukturmatrix, welche so sortiert ist, daß die Summe ihrer Elemente über der Hauptdiagonalen minimiert ist. Im Hinblick auf das korrespondierende Kausaldiagramm bedeutet dies, daß die Zahl der Einflußpfeile in die Nicht-Prozeduralrichtung minimiert ist.
Bisher wurden simultane und rekursive Modelle auf rein struktureller Ebene gekennzeichnet. Nunmehr soll auf die semantische Interpretation ihrer Beziehungen im Rahmen eines empirischen Modells eingegangen werden.
Simultane Gleichungssysteme führen zu Interpretationsschwierigkeiten, wenn man sie zur Entwicklung eines Definitionssystems oder zur Beschreibung hypothetischer Beziehungen verwenden will. Betrachtet man eine Variablenschleife, die in einem Modell auftritt, so stellt sich die Frage: Kann eine solche Variablenschleife sinnvoll als eine geschlossene Kette von Definitions- oder auch Hypothesengleichungen verwendet werden? Die potentiellen Einwände sind folgende:

– Werden die Variablen in einer Schleife nur durch Definitionsgleichungen erklärt, dann ist jede dieser Variablen über mehrere Definitionsgleichungen von sich selbst abhängig. In der Definitionslehre gilt aber die Forderung, daß Zirkeldefinitionen nicht zulässig sind. Sind daher auch solche 'Schleifendefinitionen' verboten?

– Wird in einer Variablenschleife eine Variable X durch eine Hypothesengleichung erklärt, dann ist X über mehrere Definitions- oder auch Hypothesengleichungen von sich selbst abhängig. Aufgrund der Transitivitätsbeziehungen kausaler Erklärungen müßte sich X daher selbst mitverursachen. Dies widerspricht dem Kausalprinzip, welches ablehnt, daß eine Wirkung ihre eigene Ursache (oder Mitursache) sein kann.

Akzeptiert man beide Argumente, dann dürften simultane Gleichungssysteme in empirischen Modellen nicht zugelassen werden.[1]
Simultane Gleichungssysteme können aber trotz dieser Einwände in Kosten-Leistungsmodellen zur Anwendung kommen. Es ist nur zu rechtfertigen, warum sie (dennoch) anwendbar sind.
Wir wenden uns im folgenden den Arten simultaner Gleichungssysteme in Kosten-Leistungsmodellen zu. Kosten-Leistungsmodelle können fünf Arten von simultanen Beziehungen enthalten:

1. Preisschleifen zwischen Hilfskostenstellen
2. Bestellmengenschleifen zwischen Hilfskostenstellen
3. Preisschleifen zwischen Kostenträgern
4. Bestellmengenschleifen zwischen Kostenträgern
5. Umlagen zwischen Hilfskostenstellen

Preisschleifen zwischen den Kostenartentableaus von Hilfskostenstellen treten am häufigsten auf. Eine solche Beziehung beschreibt Abb. 4. Die Kostenstellen der Wasser- und Stromerzeugung berechnen einen Preis P_W und P_S auf Vollkostenbasis. Aus Abb. 4 lassen sich zwei Gleichungen ableiten, in welchen nur die beiden Preise als symbolische Größen auftreten. Sie werden durch (3) beschrieben.

---

1 Von einer solchen Konsequenz geht z. B. die Simulationssprache DYNAMO aus, in welcher simultane Gleichungen nicht erlaubt sind.

$$P_W = \frac{20.000 * P_S + 6.000}{10.000}$$

(3)

$$P_S = \frac{2.000 * P_W + 18.000}{100.000}$$

Man erkennt, daß P_W nicht ohne die Kenntnis von P_S und P_S nicht ohne die Kenntnis von P_W ermittelt werden kann. Es liegt ein simultanes Gleichungssystem vor, dessen Kausaldiagramm eine Preisschleife bildet.

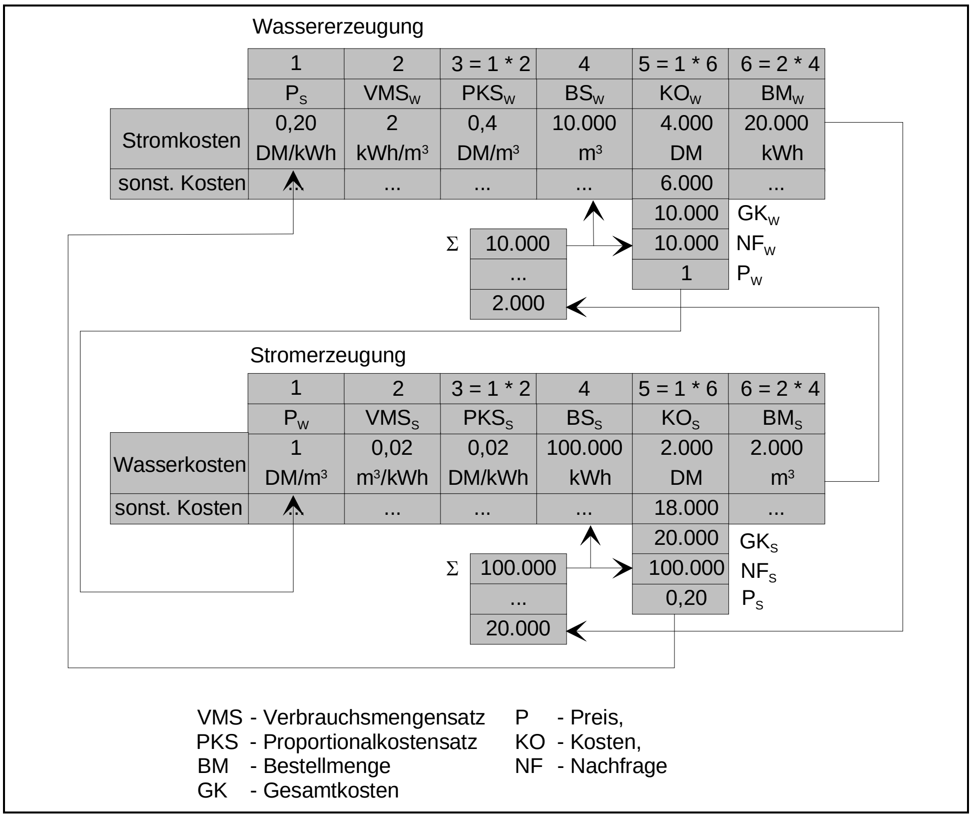


Abb. 4: Beispiel einer Preisschleife zwischen Hilfskostenstellen

Simultane Gleichungssysteme dieses Typs werden als *Preisschleifensysteme* bezeichnet. Solche Preisschleifensysteme können beträchtliche Ausmaße annehmen und hundert und mehr Preise (in verschiedenen Kostenartentableaus) umfassen. Die Preise solcher Preisschleifensysteme werden durch das folgende Gleichungssystem in allgemeiner Form beschrieben:

$$P_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} BM_{i,1} * P_i + SK_1 \right) \Bigg/ \left(\sum_{k=1}^{n} BM_{1,k} + SBM_1 \right)$$

(4) $$\vdots$$

$$P_n = \left(\sum_{i=1}^{n} BM_{i,n} * P_i + SK_n \right) \Bigg/ \left(\sum_{k=1}^{n} BM_{n,k} + SBM_n \right)$$

wobei:

P_i, P_j	–	Preis der Bezugsgrößeneinheit i bzw. j
$BM_{i,k}$	–	Bestellmenge der Bezugsgrößeneinheit k bei der Bezugsgrößeneinheit i
SK_j	–	Sonstige Kosten der Bezugsgrößeneinheit j
SBM_j	–	Sonstige Bestellmenge bei der Bezugsgrößeneinheit j
i	–	Index für liefernde Bezugsgrößeneinheit
j, k	–	Index für bestellende Bezugsgrößeneinheit
n	–	Anzahl der Bezugsgrößeneinheiten

Dabei sind die sonstigen Kosten einer Bezugsgrößeneinheit j (SK_j) primäre Kosten der Bezugsgrößeneinheit oder sekundäre Kosten von Bezugsgrößeneinheiten, die nicht in dem Preisschleifensystem enthalten sind. Die sonstige Bestellmenge bei der Bezugsgrößeneinheit j (SBM_j) beschreibt die Summe aller Bestellungen von Bezugsgrößeneinheiten, die nicht in dem Preisschleifensystem liegen.

Mit

(5) $$a_{i,j} = \frac{BM_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n} BM_{j,k} + SBM_j}$$

und

(6) $$c_j = \frac{SK_j}{\sum_{k=1}^{n} BM_{j,k} + SBM_j}$$

ergibt sich das lineare Gleichungssystem

(7)
$$P_1 = a_{1,1} * P_1 + \cdots + a_{n,1} * P_n + c_1$$
$$\vdots$$
$$P_n = a_{1,n} * P_1 + \cdots + a_{n,n} * P_n + c_n$$

Damit ein simultanes Gleichungssystem vorliegt, darf die Matrix ($a_{i,j}$) nicht dekomponierbar sein. In einem Planungsmodell, welches aufgrund bestimmter Beziehungen in Modelltableaus bestimmt ist, treten die Verrechnungspreise eines Preisschleifensystems nicht in der Form (7) auf. Es liegt vielmehr ein simultanes Gleichungssystem vor, welches außer den Verrechnungspreisen weitere endogene Variablen enthält. In Abb. 4 wird beispielsweise die Beinflussung von P_S durch P_W mit Hilfe von

(8) $P_S = GK_S / NF_S$

(9) $GK_S = SK_S + WK_S$

(10) $GK_S = SK_S + WK_S$

P_S	–	Preis Strom [DM/kWh]
GK_S	–	Gesamtkosten der Stromerzeugung [DM]
NF_S	–	Nachfrage Strom [kWh]
SK_S	–	Sonstige Kosten der Stromerzeugung [DM]
WK_S	–	Wasserkosten der Stromerzeugung [DM]
BM_W	–	Bestellmenge Wasser der Stromerzeugung [m³]
P_W	–	Preis Wasser [DM/m³]

Gleichung 10 ist falsch doppelt xx Herr Kalz hat die richtige Gleichung in seinem Skript

beschrieben. Neben P_S und P_W sind daher auch noch GK_S und WK_S endogene Variablen des simultanen Gleichungssystems. Zu einer Preisgleichung für P_S, die der Form (7) entspricht, gelangt man durch algebraische Operationen, die die endogenen Variablen GK_S und WK_S eliminieren. Dies ergibt:

(11) $P_S = a * P_W + c$

mit

(12) $a = BM_W / NF_S$

(13) $c = SK_S / NF_S$

Im Rahmen von Systemen der Kostenplanung soll es möglich sein, mit Hilfe computeralgebraischer Verfahren die linearen Gleichungssysteme der Form (7) für die vorliegenden Preisschleifensysteme zu ermitteln. Ihre Koeffizientenmatrix entspricht der Strukturmatrix der Preisgleichungen. Statt einer 1 enthält die Koeffizientenmatrix aber den Wert des Koeffizienten.

Wenn Preisverrechnungen der Form (7) auftreten, dann wird oft von 'interdependent abrechnenden Kostenstellen' gesprochen. Eine solche Bezeichnung läßt aber außer acht, daß auch die Bezugsgrößeneinheiten einer Mehrbezugsgrößen-Kostenstelle interdependent miteinander abrechnen können oder auch eine Kostenstelle sich selbst beliefern kann. Dies gilt zum Beispiel für den Strom, den die Stromerzeugung selbst verbraucht. Es gibt daher (simultane) Preisschleifensysteme, bei denen keine Kostenstellen interdependent miteinander abrechnen. In sehr vielen Fällen liegen diese Bedingungen aber nicht vor, so daß es dann (wie in Abb. 4) angemessen ist, von interdependent abrechnenden (Einbezugsgrößen-)Kostenstellen zu sprechen.
Das Gleichungssystem (4) ist ein System von Definitionsgleichungen der Verrechnungspreise. Ein zu definierender Preis P_i läßt sich immer zumindest über eine Schleife auf sich selbst zurückführen. Die durch solche Schleifen bewirkte 'Zirkeldefinition' ist aber akzeptabel, wenn eine Lösung des Gleichungssystems existiert. Denn es lassen sich keine Argumente finden, um eine solche Zirkeldefinition als unzulässig abzulehnen.[2]

Der zweite Typ einer simultanen Beziehung ist die Bestellmengenschleife zwischen Kostenartentableaus. Eine solche Bestellmengenschleife ist (neben der erörterten Preisschleife) in Abb. 4 beschrieben. Sie ergibt sich gemäß:

$$\begin{aligned} BM_S &= 0{,}02 * (\overbrace{80.000 + BM_W}^{B_S}) \\ BM_W &= 2 * (\underbrace{8.000 + BM_S}_{B_W}) \end{aligned} \tag{14}$$

BM_S	–	Bestellmenge Strom durch die Wassererzeugung
BM_W	–	Bestellmenge Wasser durch die Stromerzeugung
B_S	–	Beschäftigung der Stromerzeugung
B_W	–	Beschäftigung der Wassererzeugung

Die Bestellmenge an Strom durch die Wasserzeugung (BM_S) hängt von der Bestellmenge an Wasser (BM_W) ab, die die Stromerzeugung (z. B. zum Kühlen) benötigt und umgekehrt.
Wenn solche Bestellmengenbeziehungen existieren, dann soll davon gesprochen werden, daß das entsprechende Kausaldiagramm ein *Bestellmengenschleifensystem* bildet.
In Abb. 5 wird ein Bestellmengenschleifensystem zwischen drei Kostenstellen beschrieben. Eine Kostenstelle kann, wie die Kostenstelle KSC zeigt auch mehrere Bestellungen vornehmen. Die durch Pfeile beschriebenen Bestellmengen in Abb. 5 bilden ein System von Bestellmengenschleifen.

---

2 In der klassischen Definitionslehre wurde ein solcher Fall bisher nicht diskutiert.

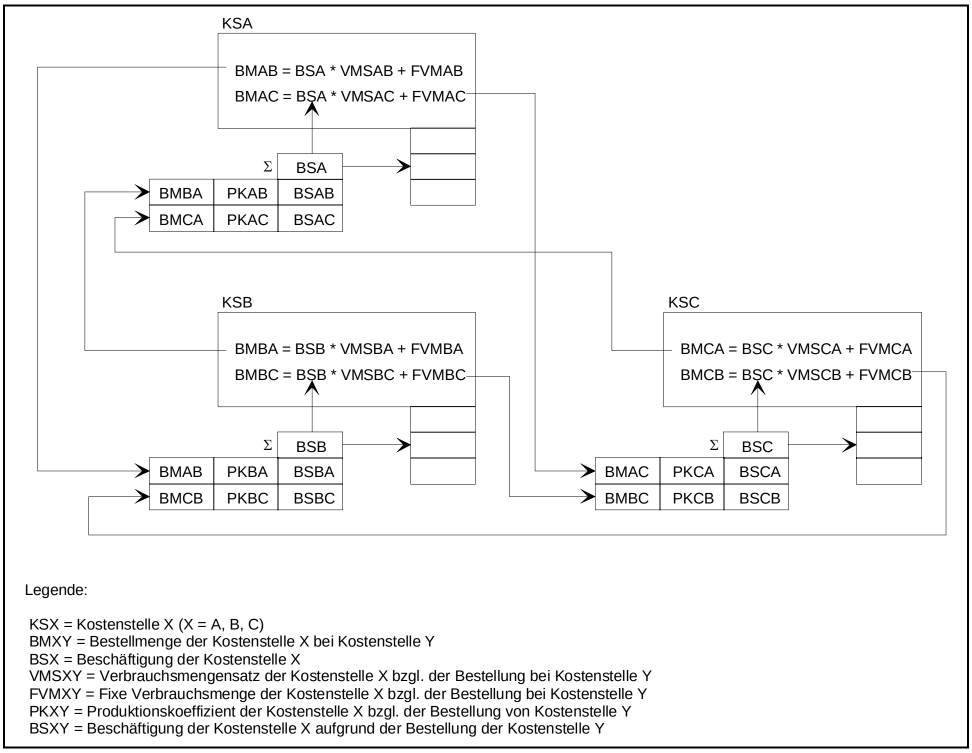


Abb. 5: Beispiel eines Bestellmengenschleifensystems

Die allgemeine Form eines Gleichungssystems, welches ein Bestellmengenschleifensystem beschreibt, zeigt (15). Es ist aus einem Modelltableausystem wie in Abb. 5 durch algebraische Umformungen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} BM_1 &= GBS_{1,1} * BM_1 + \cdots + GBS_{1,n} * BM_n + FVM_1 \\ &\vdots \\ BM_n &= GBS_{n,1} * BM_1 + \cdots + GBS_{n,n} * BM_n + FVM_n \end{aligned} \tag{15}$$

BM_i – Bestellmenge zwischen zwei Bezugsgrößeneinheiten

$GBS_{i,j}$ – Gesamter Bedarfssatz der Bestellung i, die durch die Bestellung j induziert worden ist.

FVM_i – Fixe Verbrauchsmenge zwischen zwei Bezugsgrößeneinheiten

n – Anzahl der Bestellungen

($GBS_{i,j}$) ist eine nicht dekomponierbare Matrix. Der gesamte Bedarfssatz muß keine Basisgröße sein, sondern kann auch aus dem Produkt eines Verbrauchsmengensatzes mit einem Produktionskoeffizienten errechnet werden (vgl. Abb. 5).

Es fragt sich, wie eine Bestellmengenschleife empirisch zu interpretieren ist. Die Gleichungen in (14), welche eine Bestellmengenschleife beschreiben, sind keine Definitionsgleichungen, sondern Hypothesengleichungen. Mit Einsetzung der ersten Gleichung von (14) in die zweite erhält man eine 'verdichtete' Hypothesengleichung, welche besagt, daß die Bestellmenge BM_S von sich selbst abhängt. Dies widerspricht wie erwähnt einer kausalen Interpretation. Denn BM_S wäre in der verdichteten Hypothesengleichung Ursache und Wirkung zugleich. Solche simultanen Hypothesengleichungen werden auch im Rahmen der Ökonometrie verwendet. Ihre Rechtfertigung folgt aus der Deutung, daß die simultane Beziehung das Ergebnis der zeitlichen Aggregation einer rekursiven Beziehung darstellt. Dies soll anhand des Schemas in Abb. 6 demonstriert werden:

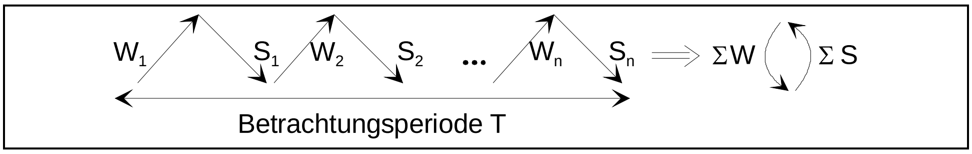


Abb. 6: Schema zur Rechtfertigung einer simultanen Bestellmengenbeziehung

Es wird davon ausgegangen, daß eine Wassermenge W_1 (über die Kühlung) zur Erzeugung des Stroms S_1 beiträgt. Es existiert damit eine zeitlich verzögerte Beziehung zwischen der Wassereinsatzmenge W_1 und der erzeugten Strommenge S_1. Für die gesamte Betrachtungsperiode T kann, wie in dem Schema dargestellt, eine simultane Beziehung formuliert werden, die den 'an sich' rekursiven Zusammenhang in offenbar hinreichender Weise beschreibt. Dies ist die Rechtfertigung für die Verwendung simultaner Bestellmengenbeziehungen.
Treten Preis- und Bestellmengenschleifensysteme in Kostenartentableaus auf, dann bestehen zwischen ihnen bestimmte Abhängigkeiten. Dies läßt sich anhand von Abb. 4 demonstrieren. Wenn in den Definitionsgleichungen in (3) der Einfluß der Bestellmengen BM_S und BM_W expliziert wird, dann erhält man:

$$P_W = \frac{2*(8.000+BM_S)*P_S+6.000}{8.000+BM_S}$$

(16)

$$P_S = \frac{0{,}02*(80.000+BM_W)*P_W+18.000}{80.000+BM_W}$$

Bevor das simultane Gleichungssystem der Verrechnungspreise (16) gelöst wird, ist das Bestellmengenschleifensystem (14) zu lösen. Denn die ermittelten Werte für BM_S und BM_W werden in (16) vorausgesetzt. Im Rahmen einer prozeduralen Durchrechnung wird daher immer zuerst das (simultane) Bestellmengenschleifensystem gelöst (als simultanes Nest) und danach das zugehörige (simultane) Preisschleifensystem.
Wenn ein (simultanes) Bestellmengenschleifensystem existiert, dann gibt es auch ein mit ihm korrespondierendes (simultanes) Preisschleifensystem, aber nicht umgekehrt. Denn die Bestellmengen, die in den (simultanen) Preisschleifensystemen auftreten, können auch fix sein, d. h. nicht von der Beschäftigung der bestellenden Kostenstelle (über einen Verbrauchsmengensatz) abhängen. In vielen Beispielen der Literatur wird von diesem Fall ausgegangen, so daß Bestellmengenschleifen praktisch nicht erörtert werden.

Das bisher beschriebene Bestellmengenschleifensystem verlief über Kostenartentableaus. Es handelte sich daher um **Bestellungen von Mengen XX**, die *keine* Kostenträger sind. Wenn aber ein mehrstufiges Kostenträgersystem realisiert ist, dann sind auch Bestellmengenschleifen und Preisschleifen zwischen den Kostenträgern möglich. Ein solcher Fall liegt vor, wenn ein Kostenträger in der Fertigungsstelle als Vorprodukt von sich selbst fungiert. Solche Produktionsbeziehungen sind vor allem in der chemischen Industrie zu beobachten.
In Abb. 7 ist ein zweistufiges Kostenträgersystem beschrieben. Die Produktionsmenge der zweiten Stufe (N_2) wird mit einem Betrag von N_{22} als Einsatzstoff für den Kostenträger der ersten Stufe verwendet. Die Einsatzmenge steht in einem bestimmten Verhältnis (VMS_2) zur Produktionsmenge N_1 des Kostenträgers. Diese Produktionsmenge fungiert vollständig als Einsatzmenge des Kostenträgers der zweiten Stufe.
Die mathematischen Beziehungen unterscheiden sich nicht von dem erörterten Fall einer Bestellmengenschleife zwischen Kostenartentableaus. Es ergibt sich daher ein Bestellmengen- und ein korrespondierendes Preisschleifensystem.

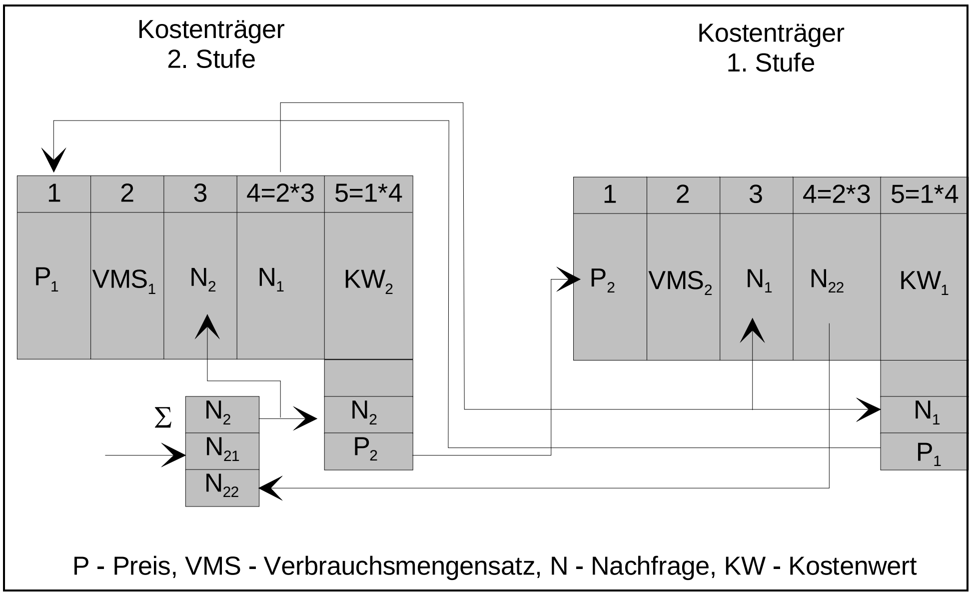


Abb. 7: Beispiel einer Bestellmengenschleife zwischen Kostenträgern

Die fünfte Art eines simultanen Gleichungssystems eines Kosten-Leistungsmodells kann durch die Verwendung von Umlagen auftreten, d. h. Verrechnungen, denen keine echte Lieferung zu Grunde liegt.

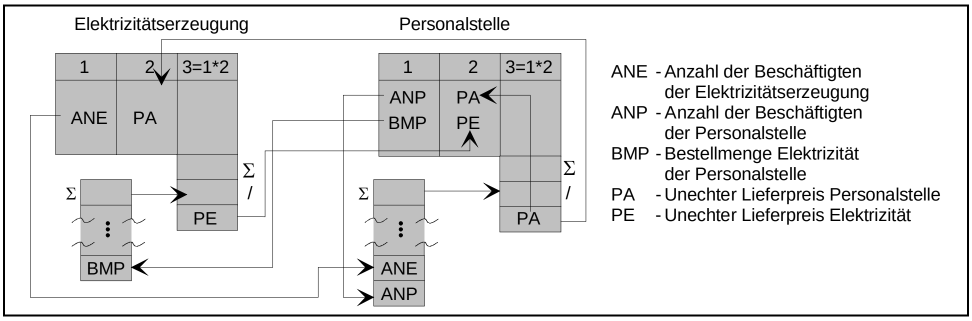


Abb. 8: Beispiel eines simultanen Gleichungssystems durch Umlagenverrechnung

In Abb. 8 ist der Fall beschrieben, daß die Kosten der Personalstelle nach einem Umlageschlüssel verteilt werden, welcher der Zahl der Beschäftigten entspricht. Da **auch xx** die Personalstelle Beschäftigte hat, verrechnet sie Personalkosten auf sich selbst. Dies führt zu einer internen Umlagenschleife. Wenn die Personalstelle von einer anderen Kostenstelle eine Leistung erhält, dann ergibt sich eine weitere simultane Beziehung. Dies ist im angeführten Beispiel der Fall. Die simultane Beziehung ergibt sich aus der echten Stromlieferung der Stromerzeugung an die Personalstelle und der Umlage der Personalstelle an die Stromerzeugung.
Abgesehen von diesen Standardfällen einer Lieferungs- und Umlagenverrechnung sind eine Reihe anderer simultaner Beziehungen in Kosten-Leistungsmodellen denkbar. Es seien zwei Beispiele angeführt:

1. Wenn der Leiter einer Absatzabteilung eine Prämie erhält, die vom erzielten Absatzbereichsgewinn abhängt, dann beeinflußt diese Prämie als Kostengröße zugleich diesen Bereichsgewinn. Damit entsteht eine simultane Beziehung.
2. In der Praxis wird der Verkaufspreis oft nach einer sogenannten Kosten-Plus-Preisvorschrift ermittelt, d. h.:

(17) $P = VKS + GM$

P	–	Preis
VKS	–	Vollkostensatz
GM	–	Gewinnmarge

Wenn die Werbungskosten nach der Entscheidungsvorschrift

(18) $WK = AS * U$

WK	–	Werbungskosten
U	–	Umsatz
AS	–	Anteilssatz

wobei:

(19) $U = P * AM$

festgelegt werden, dann tritt ein simultanes Gleichungssystem auf. Denn die Werbungskosten, die in den Vollkostensatz eingehen, hängen vom Absatzpreis ab, der eine Komponente des wertmäßigen Umsatzes (U) bildet. Das simultane Gleichungssystem wird in diesem Beispiel durch die Einführung von zwei Entscheidungsvorschriften, d. h. besondere Formen einer Hypothese, bewirkt. Es entsteht die in Abb. 9 angeführte Variablenschleife.

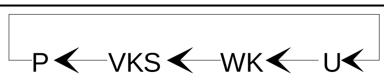


Abb. 9: Beispiel einer simultanen Beziehung im Absatzbereich

XX Abb 9 Schleife defekt

Wenn einer der fünf Typen einer (simultanen) Preis-, Bestellmengen- oder Umlagenschleife vorliegt, dann ist es möglich, daß ein Planungssystem ein solches Subsystem identifiziert und dem Benutzer die Beziehungen vor Augen führt. Bei größeren Kostenrechnungssystemen kann dies in Form einer Strukturmatrix erfolgen.

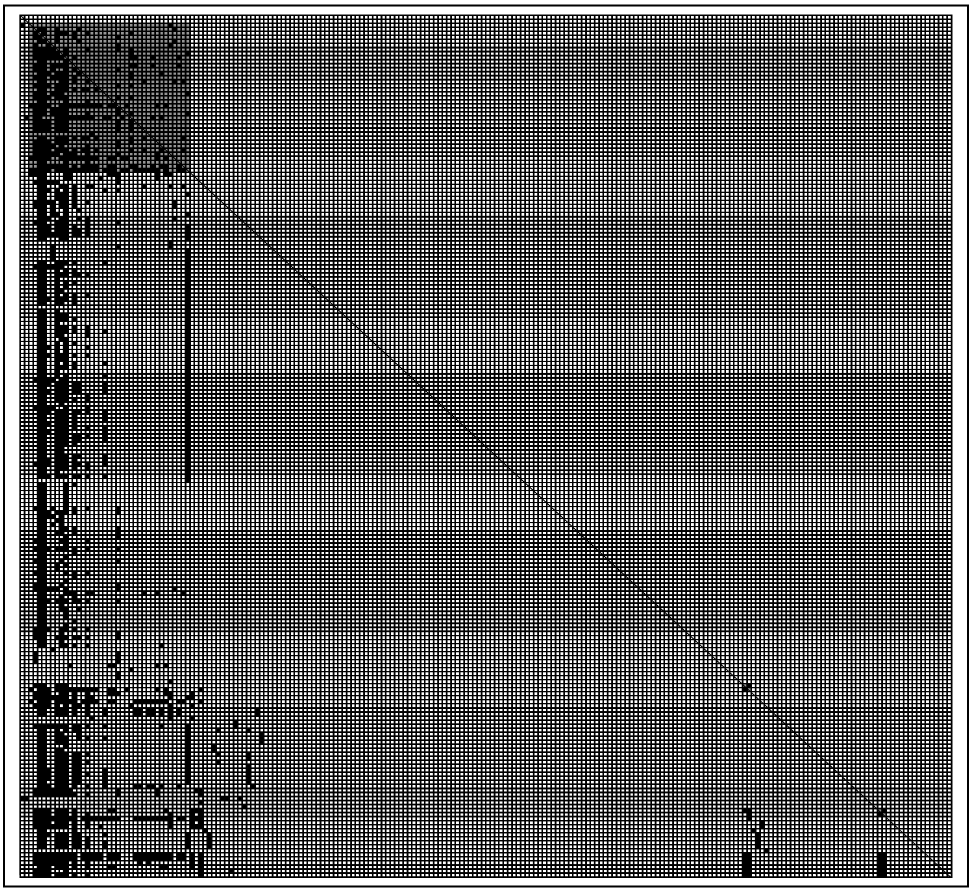


Abb. 10: Beispiel der Strukturmatrix eines Systems von Einbezugsgrößen-Kostenstellen

Abb. 10 zeigt eine solche Matrix für ein pharmazeutisches Unternehmen. Man erkennt, daß es drei (simultane) Preisschleifensysteme gibt. Bei zweien wird nur eine Verrechnung zwischen zwei Kostenstellen vorgenommen. Die dritte beschreibt ein System von 37 interdependent abrechnenden Kostenstellen. Die Strukturmatrix des Preisschleifensystems ist (zwangsläufig) nicht dekomponierbar. Im vorliegenden Fall handelt es sich auch um eine rückführungsminimale Matrix, d. h. die Zahl der Elemente über der Hauptdiagonalen ist minimiert.

Nach der Struktur- und Inhaltsanalyse simultaner Gleichungssysteme wenden wir uns schließlich ihrer numerischen Lösung zu. Eine Lösung liegt vor, wenn bei einer Durchrechnung des Modells für die endogenen Variablen der simultanen Nester Zahlenwerte ermittelt werden, die das Gleichungssystem befriedigen. Bei rekursiven Modellen kann man immer bestimmte Werte der endogenen Variablen berechnen. Dies ist aber bei den endogenen Variablen von simultanen Nestern nicht zwingend der Fall. Über die zur Lösung verwendeten Verfahren und die Grenzen der Lösbarkeit sollte auch der reine Modellbenutzer etwas wissen, weil ihm ansonsten unklar bleibt, warum ein Modell nicht angewendet werden kann.

Wir unterscheiden im folgenden zwischen linearen und nichtlinearen Modellen. Ein lineares simultanes System liegt vor, wenn die endogenen Variablen Y_1 bis Y_n eines Subsystems durch das Gleichungssystem

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
Y_1 &= a_{1,1} * Y_1 + \cdots + a_{1,n} * Y_n + c_1 \\
&\vdots \\
Y_n &= a_{n,1} * Y_1 + \cdots + a_{n,n} * Y_n + c_n
\end{aligned}
$$

beschrieben werden kann. Die Koeffizienten a_{ij} und c_i sind als numerische Werte vorzugeben. Die Matrix (a_{ij}) ist darüber hinaus nicht dekomponierbar. Es gibt verschiedene mathematische Verfahren und entsprechende Computerprogramme, um solche linearen Gleichungssysteme zu lösen, falls sie lösbar sind. Verfahren wie die Matrizeninversion oder das Gaußsche Eliminationsverfahren sollen als *zwingende Lösungsverfahren* bezeichnet werden.[3] Denn sie führen immer zu einer Lösung, wenn diese existiert.
Die numerischen Werte der Koeffizienten a_{ij} und der Konstanten c_i in (20) müssen meistens zur Verfügung stehen, um sie einem EDV-Programm wie z. B. LINPACK zu übergeben, welches dieses zwingende Lösungsverfahren ausführt. Diese Werte stehen aber in dem Gleichungsmodell, mit welchem eine Kosten-Leistungsrechnung betrieben wird, fast nie explizit zur Verfügung.
In allen bekannten Systemen wird daher das sogenannte Gauß-Seidel-Verfahren praktiziert. Es handelt sich um ein iteratives Verfahren, welches im Vorgehen sehr einfach ist, aber *nicht* zwingend zu einer Lösung führt, wenn es eine gibt. Das Verfahren kann anhand von Abb. 11 demonstriert werden.

---

3 Vgl. Kurbel, K.; Kalb, G. (Direkte Verfahren 1981), S. 15 ff.

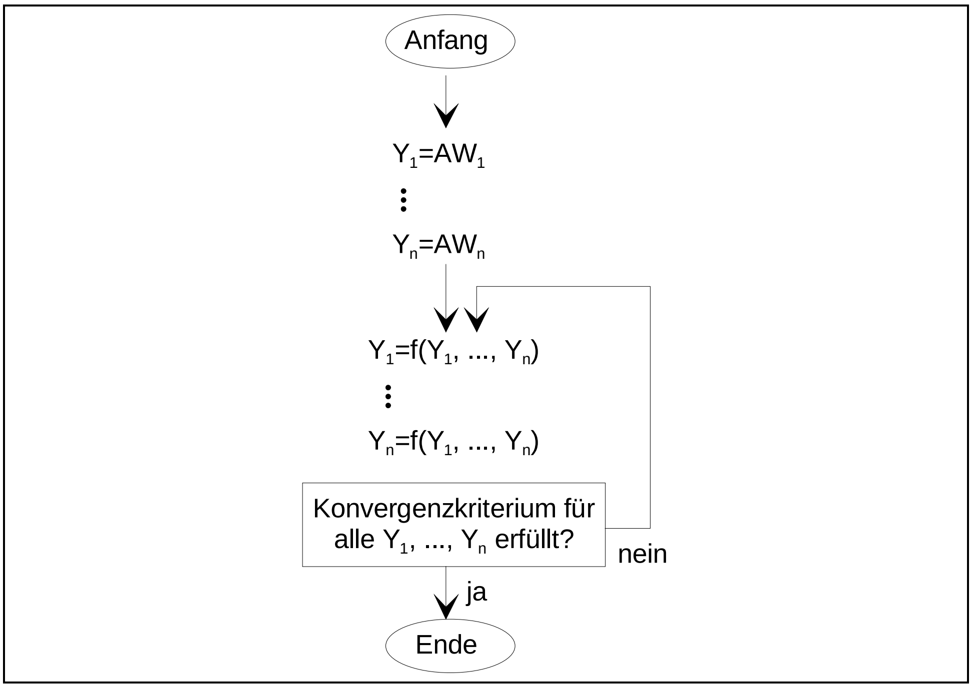


Abb. 11: Schematische Darstellung des Gauß-Seidel-Verfahrens

Die Variablen Y_1, Y_2, …eines in Frage stehenden simultanen Nestes werden in beliebiger Reihenfolge angeordnet. In dieser Reihenfolge werden sie während des Iterationsprozesses mehrfach durchgerechnet. Zu Beginn wird den Variablen ein Anfangswert (AW_i) zugewiesen, der oft Null gewählt wird, wenn man keinen 'besseren' kennt.[4] Dann werden die Gleichungen (über eine Schleife) mehrfach durchgerechnet. Nach jeder Durchrechnung werden die Variablen nach einem Konvergenzkriterium beurteilt. Dies kann zum Beispiel

(21) $$\frac{Y_i^j - Y_i^{j-1}}{Y_i^{j-1}} \le 10^{-9}$$

betragen. Der Index j gibt den (letzten) Iterationsschritt an. Sobald für alle Variablen Y_1, Y_2, … das Konvergenzkriterium eingehalten wird, wird der Iterationsprozeß abgebrochen, denn die ermittelten Y-Werte erfüllen das Gleichungssystem in ausreichendem Maße.
Das Verfahren ist so attraktiv, weil es nicht notwendig ist, die simultanen Subsysteme zu kennen. Die Schleife kann vielmehr um alle Erklärungsgleichungen eines Modells gelegt werden, die in beliebiger Reihenfolge sortiert sein können. Auch ist die Konvergenzgeschwindigkeit sehr hoch und bei der heutigen Leistungsfähigkeit der Rechner fast immer ausreichend.

---

[4] Bessere Werte sind z. B. die endogenen Variablenwerte der Vorperiode oder die Werte einer vorherigen Durchrechnung des Systems mit anderen Basisgrößenwerten.

Ein höchst unbefriedigender Nachteil ist aber, daß das Gauß-Seidel-Verfahren nicht immer konvergiert, wenn eine Lösung existiert. Als Beispiel sei das lineare Gleichungssystem

(22) $x = 2y + 1$

(23) $y = 3x + 2$

angeführt, welches, wie man leicht erkennt, die Lösung x = -1 und y = -1 besitzt. Dieses System konvergiert aber nicht. Der Iterationsverlauf für y ist beispielsweise

(24) $y^j = 6y^{j-1} + 5$

d. h. mit wachsendem Iterationsschritt j wächst y permanent.[5]
Unter diesen Umständen ist es von Bedeutung zu wissen, ob die beschriebenen (simultanen) Bestellmengen- und Preisschleifensysteme immer eine Lösung besitzen und ob diese mit Hilfe eines Gauß-Seidel-Verfahrens ermittelbar ist.
Wie Münstermann und Kruschwitz gezeigt haben, liegt bei den Preisschleifensystemen immer eine Konvergenz vor.[6] Die Konvergenz ist unabhängig davon, welcher **Anfangswerte xx** gewählt **werden**. Sie wird durch die spezifischen Relationen der Bestellmengen in (5) bewirkt.
Ein großer Vorteil des Gauß-Seidel-Verfahrens ist, daß es auch bei nichtlinearen simultanen Gleichungssystemen anwendbar ist. Kosten-Leistungsmodelle enthalten aber selten nichtlineare Beziehungen, weil die ihnen zu Grunde liegende flexible Plankostenrechnung mit linearen Verbrauchsmengen- und Kostenfunktionen arbeitet.
In der Literatur zur Kostenrechnung werden nur Preisschleifensysteme erörtert, die die Lösung eines interdependenten Systems von Verrechnungspreisen erfordern. Sie besitzen sicher die größte Relevanz, aber auch die anderen Arten von simultanen Gleichungssystemen sind möglich.
Manche Autoren propagieren ein 'Treppenumlageverfahren' zur Verrechnung der Umlagen zwischen den Kostenstellen.[7] Die Verrechnungen sollen so vorgenommen werden, daß die Leistungen sukzessiv auf die nachfolgenden Kostenstellen verrechnet werden. Dieses Treppenverfahren wird realisiert, wenn es gelingt, die Gleichungen eines Kosten-Leistungsmodells in prozeduraler Reihenfolge zu ordnen. Es soll unabhängig davon angewendet werden, ob simultane Gleichungssysteme existieren oder nicht. Wenn aber eine prozedurale Anordnung *nicht* möglich ist, „muß man die Reihenfolge (der Verrechnungen) so wählen, daß die jeweils kleineren Leistungsströme unterdrückt werden und der Verrechnungsfehler möglichst klein gehalten wird."[8]

---

[5] Man kann durch andere 'Umstellungen' der endogenen Variablen u. U. auch eine Lösung mit dem Gauß-Seidel-Verfahren erreichen. Löst man beispielsweise (22) nach Y und (23) nach X auf, dann erhält man das simultane Gleichungssystem $y=(x-1)/2$ und $x=(y-2)/3$. Dieses konvergiert bei Anwendung des Gauß-Seidel-Verfahrens. Solche Normalisierungen und andere Umstellungen wie Änderungen der Reihenfolge sind für praktische Zwecke aber ungeeignet, weil der Benutzer in den Lösungsprozeß eingreifen müßte. Damit ginge die Einfachheit des Gauß-Seidel-Verfahrens verloren.

[6] Zum Beweis siehe Münstermann, H. (Unternehmensrechnung 1969), S. 141 ff. sowie Kruschwitz, L. (Innerbetriebliche Leistungsverrechnung 1979), S. 112 ff.

[7] Schweitzer, M.; Küpper, H. U. (Kostenrechnungssysteme 1998), S. 142.

[8] Schweitzer, M.; Küpper, H. U. (Kostenrechnungssysteme 1998), S. 142. Der Klammerausdruck wurde vom Verfasser eingefügt.

Ein solcher Fall liegt immer vor, wenn simultane Liefermengen-Preis-Beziehungen auftreten. Es ist völlig unangemessen, bei den zur Verfügung stehenden Möglichkeiten der Lösung simultaner Gleichungssysteme ein solches 'Treppenumlageverfahren' zu verwenden. Denn es bedeutet mathematisch, daß ein simultanes Gleichungssystem durch ein 'vereinfachtes' rekursives ersetzt wird. Damit wird auf eine exakte Weiterverrechnung der Kosten verzichtet. Wie erwähnt ist bei einem Preisschleifensystem immer eine Lösung ermittelbar.
Bezüglich der Beurteilung simultaner Gleichungssysteme in Kostenmodellen zeigen sich bei manchen Autoren gewisse Unsicherheiten. So bezeichnet Schneider die 'Verrechnung innerbetrieblicher Leistungen' als ein unzulässiges Verfahren: Denn „Schwierigkeiten ergeben sich, wenn mehrere Kostenstellen sich gegenseitig Leistungen erstellen. Hierfür wird in der Kostentheorie die Aufstellung simultaner Gleichungen gefordert. Da diese Aufgabe praktisch nicht zu bewältigen ist, werden bei einer Vorgabe, vollständige Kostenentlastung der leistenden Kostenstelle zu verwirklichen, willkürreiche Probiertechniken (Iterationsverfahren) gewählt."[9] Diese Aussage von Schneider enthält ziemliche Ungereimtheiten. Er meint, daß die Aufgabe 'Aufstellung von simultanen Gleichungen' praktisch nicht zu bewältigen ist. Dies ist unzutreffend. Mit Hilfe von Konfigurationssystemen (wie dem SAP R/3-System) kann man nahezu beliebig große simultane Gleichungssysteme von Preisschleifen erstellen. In der Praxis finden sich interdependente Preisschleifen mit Hunderten von Kostenstellen, deren Formulierung keine Schwierigkeiten bereitet. Offenbar meint Schneider aber gar nicht die Aufgabe der 'Aufstellung von simultanen Gleichungen', sondern deren Lösung. Seiner Meinung nach gibt es offenbar keine Lösung, sondern es werden nur 'willkürreiche Probiertechniken' praktiziert, die zu keiner 'vollständigen Kostenentlastung', d. h. einer Lösung der 'simultanen Gleichungen', führen. Dies trifft ebenfalls nicht zu. Preisschleifensysteme, welche Schneider meint, sind immer lösbar und zwar mit einer beliebig vorgebbaren Genauigkeit.
Simultane Gleichungssysteme bilden ein unverzichtbares Modellierungspotential von Kosten-Leistungsmodellen.

Literatur

KRUSCHWITZ, L. (INNERBETRIEBLICHE LEISTUNGSVERRECHNUNG 1979): INNERBETRIEBLICHE LEISTUNGSVERRECHNUNG MIT NICHT EXAKTEN UND ITERATIVEN METHODEN, IN: KOSTENRECHNUNGSPRAXIS, 1979, HEFT 3, S. 105 – 116.

KURBEL, K.; KALB, G. (DIREKTE VERFAHREN 1981): ZUR ANWENDBARKEIT DIREKTER VERFAHREN BEI DER INNERBETRIEBLICHEN LEISTUNGSVERRECHNUNG, IN: KOSTENRECHNUNGSPRAXIS, 1981, HEFT 1, S.15 – 24.

MÜNSTERMANN, H. (UNTERNEHMENSRECHNUNG 1969): UNTERNEHMENSRECHNUNG, WIESBADEN 1969.

SCHNEIDER, D. (RECHNUNGSWESEN 1994): BETRIEBSWIRTSCHAFTSLEHRE, BD. 2 RECHNUNGSWESEN, MÜNCHEN 1994.

SCHWEITZER, M.; KÜPPER, H. U. (KOSTENRECHNUNGSSYSTEME 1998): SYSTEME DER KOSTEN- UND ERLÖSRECHNUNG, MÜNCHEN 1998.

[9] Schneider, D. (Rechnungswesen 1994), S. 394.